

ZESTAW 8

WSTĘP DO FIZYKI KWANTOWEJ

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#wdfk_ft

Tematyka: Zasada nieoznaczoności. Bariera potencjału, efekt tunelowy. Ewolucja czasowa układu, obraz Heisenberga.

8.1. Zasada nieoznaczoności I. Stacjonarny gaussowski pakiet falowy

(a) Stan cząstki w $t = 0$ opisany jest funkcją falową postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2), & \text{dla } -a \leq x \leq a, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Znaleźć stałą normalizacyjną A . Wyznaczyć odchylenia standardowe $\sigma(x)$ i $\sigma(p)$ i pokazać, że spełniona jest zasada nieoznaczoności Heisenberga. (Trzeba przypomnieć sobie statystyczne obliczanie wariancji i kwantowomechaniczną definicję wartości oczekiwanej).

(b) Nieunormowana funkcja stanu cząstki dana jest funkcją Gaussa:

$$u(x) = \exp \left[-\frac{x^2}{4\sigma_x^2} \right]$$

Proszę wyznaczyć funkcję gęstości prawdopodobieństwa otrzymania przy pomiarze pędu wartości p (tj. funkcję stanu w przestrzeni pędu). Jak wiąże się nieoznaczoność pędu cząstki z nieoznaczonością jej położenia w tym stanie? (★★★★) (★★★★★)

Uwaga. Zaproponowana wyżej funkcja jest amplitudą funkcji falowej typowego falowego pakietu gaussowskiego: $\psi_k(x) = e^{ikx} e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}}$ (nieunormowanego), który minimalizuje zasadę nieoznaczoności (por. wykład).

8.2. Zasada nieoznaczoności II

Weźmy taki komutator: $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, gdzie $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ - operatory hermitowskie.

(a) Sprawdzić relację komutacji dla operatorów $\hat{\mathcal{A}} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi$ oraz $\hat{\mathcal{B}} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle_\psi$, jeśli $\langle \hat{O} \rangle_\psi$ oznacza wartość oczekiwaną operatora $\hat{O}$ w stanie ψ .

(b) [Brojan 1.1. zad. 51] Zapisać przy użyciu iloczynu skalarnego kwadrat normy funkcji stanu $(\hat{\mathcal{B}} - i\lambda\hat{\mathcal{A}})\psi$, gdzie λ jest pewnym parametrem, a ψ pewnym stanem. Otrzymujemy równanie kwadratowe na λ , które z warunku nieujemności iloczynu skalarnego musi być nieujemne. Jaki wtedy musi być wyróżnik trójmianu? Z tego warunku otrzymać zasadę nieoznaczoności dla obserwabli $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

Uwaga. Przyjąć, że wariancja operatora $\hat{O}$ jest następująca: $\Delta_\psi^2(\hat{O}) = \langle \psi, \hat{O}^2 \psi \rangle$, gdzie $\hat{O} = \hat{O} - \langle \hat{O} \rangle_\psi$.

Dlaczego? Wynik: $\Delta_\psi(\hat{A})\Delta_\psi(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle \hat{C} \rangle_\psi|$.

(c) Korzystając z wyniku w punkcie (b) znaleźć, jak relacja nieoznaczoności wygląda dla pędu i położenia oraz dla energii całkowitej i czasu?

(d) [Irodow 5.39., por. Landau zad. 2 §23] Cząstka o masie m porusza się w jednowymiarowym polu potencjalnym $U = kx^2/2$ (oscylator harmoniczny). Stosując zasadę nieoznaczoności położenia-pędu ocenić najmniejszą energię cząstki w tym polu.

(e) Przy pomocy zasady nieoznaczoności pokaż, że model Bohra atomu jest z nią zgodny jedynie dla dużych wartości liczby kwantowej n (mówimy wówczas o tzw. atomach rydbergowskich).

Komentarz. Model atomu Bohra dla małych n prowadzi do sprzeczności z zasadą nieoznaczoności. Żeby móc sensownie mówić o elektronie jako cząstce posiadającej dobrze określoną trajektorię (a więc w terminach fizyki klasycznej), względne niepewności położenia (mierzonego wzdłuż orbity) i pędu powinny być małe, np. dużo mniejsze niż wyniki pomiaru.

8.3. Bariera potencjału [Eisberg & Resnick 6.5.]

(a) Proszę rozwiązać problem (tzn. znaleźć funkcje falowe) cząstki o energii $E > 0$ padającej na barierę potencjału o wysokości V_0 i szerokości d :

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x \leq d \\ 0, & x < 0 \text{ lub } x > d \end{cases}$$

Dodatkowo proszę znaleźć współczynniki transmisji T i odbicia R cząstki padającej na barierę. Własnoręcznie zapisane rozwiązania należy oddać na zajęciach najpóźniej 9 grudnia, będą one ocenione jako aktywność (0-3 pkt.).

- (b) Dokładne wyrażenie na współczynnik transmisji cząstki przez barierę ma postać:

$$T = \left[1 + \frac{\sinh^2 \sqrt{2mVd^2/\hbar^2} [1 - (E/V)]}{4(E/V)[1 - (E/V)]} \right]^{-1}$$

Proszę pokazać, że jeśli d lub V są duże, to równanie to przechodzi w uproszczony wzór:

$$T \approx 16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V} \right) e^{-(2d/\hbar)\sqrt{2m(V-E)}}$$

- (c) Korzystając z uproszczonego wzoru na współczynnik transmisji, proszę obliczyć prawdopodobieństwo, że cząstka α uwięziona w jądrze ucieknie. Promień jądra wynosi $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}$ m, wysokość bariery potencjału na powierzchni jądra wynosi 4 MeV, a energia cząstki α to 2 MeV. Można założyć, że szerokość bariery jest porównywalna z r_0 . Jakie szanse ma cząstka o energii 1 MeV?

8.4. Ewolucja czasowa. Obraz Heisenberga [por. Matthews 13.2.]

Równanie Schrödingera (zależne od czasu) jest równaniem ruchu (evolucji czasowej) układu kwantowego. Za ewolucję czasową odpowiada człon $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ (rozwiązanie części czasowej r. Schrödingera), z którym wiążemy operator ewolucji czasowej $\hat{U}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$, gdzie $\hat{H}$ jest hamiltonianem. Pełna postać funkcji stanu ma postać: $|\psi(x, t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(x)\rangle$, gdzie $|\psi(x)\rangle$ jest stanem stacjonarnym (niezależnym od czasu). Można jednak przenieść ewolucję czasową z funkcji stanu na obserwabie (operatory) - w tzw. obrazie Heisenberga.

- (a) [por. Irodow 4.54.] Wychodząc z def. wartości średniej operatora $\hat{A}$ w stanie $|\psi(x, t)\rangle$, wyprowadź równanie Heisenberga:

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}(t), \hat{H}],$$

gdzie $\hat{A}(t)$ jest zależnym od czasu operatorem (obserwabłą), a $\hat{H}$ hamiltonianem. Znaleźć postać $\hat{A}(t)$.

- (b) [Irodow 4.56.] Dowieść prawdziwość następujących równań ruchu (w 1D) w postaci operatorowej (podobieństwo do klasycznej mechaniki w ujęciu hamiltonowskim):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\hat{p}_x}{m} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_x} \quad \frac{d\hat{p}_x}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} \equiv -\text{grad } V(x) \equiv F_x = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x}$$

gdzie $V(x)$ jest potencjałem. Zapisz równania ruchu Heisenberga dla prostego przypadku, np. cząstki swobodnej. Czy rozwiązania są zgodne z naszymi oczekiwaniami?

Komentarz. W mechanice kwantowej sensowniej jest mówić o ruchu pakietu falowego z pewnym rozmyciem w przestrzeni i pędzie, niż o ruchu cząstki. Równania Heisenberga zapisane dla średniej czasowej operatorów położenia i pędu prowadzą do równań ruchu (podobnych do tych powyżej, ale zapisanych dla średnich) stanowiących treść tzw. twierdzenia Ehrenfesta. Konsekwencją tzw. Ehrenfesta jest to, że w ogólnym przypadku ruchu pakietu falowego nie można traktować jak ruchu cząstki po trajektorii (klasycznie), a jedynie w przybliżeniu „stałego potencjału w okolicy położenia centrum pakietu” (tzw. granica klasyczna) ruch pakietu falowego odpowiada ruchowi cząstki klasycznej o masie m w polu o potencjale V . Ta druga sytuacja jest dobrze spełniona dla większości układów makroskopowych.

- (c) [Matthews 13.3.] Pokazać, że dla obserwabli komutującej z hamiltonianem jej wartość średnia w dowolnym stanie nie zmienia się w czasie (taką obserwabłą nazywamy „stałą ruchu” albo „całką ruchu”).

Przydatne całki

(****)

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} \quad (\alpha > 0)$$

(*****)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \quad (\alpha > 0)$$