

ZESTAW 9

WSTĘP DO FIZYKI KWANTOWEJ

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#wdfk_ft

Tematyka: Kwantowy oscylator harmoniczny. Operatory kreacji i anihilacji.

9.1. Oscylator harmoniczny [Eisberg & Resnick 6.9. i Uzupełnienie H]

Cząstka o masie m porusza się w polu potencjału $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, gdzie $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

- Proszę zapisać r. Schrödingera dla tej cząstki. Następnie sprowadzić je do postaci bezwymiarowej przez zamianę zmiennej: $x \rightarrow u = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ (jaka będzie wówczas bezwymiarowa energia λ ?). Zbadać asymptotykę równania przez sprawdzenie rozwiązań r. Schrödingera dla funkcji typu: $\psi_{as}(u) = e^{\beta u^2}$ dla $u \rightarrow 0$ oraz $u \rightarrow \infty$. Trzeba znaleźć wartość parametru β (wynik: $\beta = -\frac{1}{2}$).
- Zakładamy postać funkcji falowej: $\psi(u) = H(u)e^{\beta u^2}$. Podstawiając funkcję $\psi(u)$ do r. Schrödingera znaleźć postać równania na funkcję $H(u)$. Równanie to ma postać równania Hermite'a. Można je rozwiązać metodą szeregów potęgowych (tzw. metoda Frobeniusa), co prowadzi do rozwiązania w postaci wielomianów Hermite'a: $H_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$. Z warunku na urwanie szeregu przy pewnym wyrazie (np. a_{n+2}) wynika warunek kwantowania energii oscylatora (w jednostkach zredukowanych): $2n - \lambda + 1 = 0$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Podać ten warunek dla energii w jednostkach fizycznych.
- Wielomiany Hermite'a mają ogólną definicję (jedną z wielu): $H_n(u) = (-1)^n e^{u^2} \frac{d^n}{du^n} (e^{-u^2})$ (jest to tzw. wzór Rodriguesa). Proszę znaleźć trzy pierwsze wielomiany (dla $n \leq 2$) i bezpośrednim rachunkiem sprawdzić czy funkcja $\psi_1(u) = H_1(u)e^{-\frac{u^2}{2}}$ jest rzeczywiście rozwiązaniem r. Schrödingera (użyć postaci bezwymiarowej). Proszę unormować stany $\psi_0(x)$ oraz $\psi_1(x)$ (wrócić do postaci wymiarowej w jednostkach fizycznych). (★★★) i (★★★★).
- Obliczyć wartości średnie energii kinetycznej i potencjalnej oscylatora o częstości ω w stanie podstawowym $\psi_0(x) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$, gdzie $\alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$. Odp. $\langle E_{kin} \rangle_{\psi_0} = \langle E_{pot} \rangle_{\psi_0} = \frac{1}{4}\hbar\omega$
- [Matthews §5.2.] Autor podaje ciekawą metodę znajdowania warunku kwantowania energii, alternatywną do metody szeregów Frobeniusa. Bezwymiarowe r. Schrödingera można zapisać przy pomocy operatorów, które dyskutowaliśmy w zad. 1.2.(a) i (b). Zainteresowanych odsyłam do tej pozycji (por. zad. 9.3.).

9.2. Operatory kreacji i anihilacji

Wprowadzamy (niehermitowskie) operatory anihilacji $\hat{a}$ oraz kreacji $\hat{a}^\dagger$ (wzajemnie sprzężone), spełniające następujące warunki:

- Relacja komutacyjna: $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.
- Operator (liczby cząstek) $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ spełnia równanie własne: $\hat{N}|n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$
- Stan $|0\rangle$ nazywamy stanem próżni, spełnia on warunek: $\hat{a}|0\rangle = 0$.
- Dowolny stan $|n\rangle$ można skonstruować za pomocą relacji: $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$.
- Stany $|n\rangle$ są ortonormalne: $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$.
- Działanie operatorów anihilacji i kreacji na stany $|n\rangle$ określone jest wzorami:

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle\end{aligned}\tag{1}$$

(g) Udowodnij, że:

- $\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$
- $\langle m|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{m,n-1}$ oraz $\langle m|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}$
- $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}$ oraz $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$
- spełnione są relacje (1) (Wskazówka. Pokaż, że $\hat{a}|n\rangle$ oraz $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ są stanami własnymi operatora $\hat{N}$, wykorzystaj tożsamości komutacyjne powyżej.)

9.3. Oscylator harmoniczny za pomocą operatorów anihilacji i kreacji

(a) Wprowadzamy operatory

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}} \right) \quad (2)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}} \right) \quad (3)$$

Pokaż, że spełniają one relację komutacyjną z zad. 9.2.a.

- (b) Odwróć relacje (2) i (3) i zapisz postać operatorów położenia i pędu przy pomocy $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$.
- (c) Zapisz hamiltonian oscylatora harmonicznego przy pomocy operatorów $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$ i pokaż, że stany własne energii oscylatora wynoszą: $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$.
- (d) Skonstruuj stan próżni (tzn. stan podstawowy) oscylatora, tj. oblicz $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$, wykorzystując 9.2.c.
Wynik znany: $\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$
- (e) Oblicz elementy macierzowe: $\langle k|x|n\rangle$, $\langle k|x^2|n\rangle$, $\langle k|\hat{p}|n\rangle$, $\langle k|\hat{p}^2|n\rangle$.

Przydatne całki

(****)

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} \quad (\alpha > 0)$$

(*****)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \quad (\alpha > 0)$$