Rozdział 1.

Wprowadzenie matematyczne

W pierwszym rozdziale przedstawiamy podstawowe informacje dotyczące narzędzi matematycznych niezbędnych do dalszych rozważań fizycznych. Definiujemy pojęcie pochodnej funkcji, prezentujemy jej graficzną interpretację i zastosowania, a następnie wprowadzamy podstawy rachunku wektorowego. Jako uzupełnienie, przy pierwszej kontakcie do pominięcia przez Czytelnika, omawiamy podstawy rachunku całkowego.

1.1. Układy równań

Układem dwóch równań na dwie niewiadome x i y nazywamy parę równań, w których zmienne x i y występują jednocześnie, np.:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \tag{1.1.}$$

Powyższe równanie należy dodatkowo nazwać układem równań *liniowych*, gdyż zmienne x i y występują w pierwszych potęgach.

Metod rozwiązywania układów równań jest przynajmniej kilka, np. powyższe równanie (1.1.) można by rozwiązać wyznaczając x z pierwszego równania i podstawiając do drugiego. W ten sposób otrzymamy jedno równanie na jedną niewiadomą y. Mając y wykorzystujemy którekolwiek z równań układu (1.1.) do znalezienia x.
Można też pomnożyć obie strony drugiego równania przez 2 i dodać równania stronami. Wtedy wyeliminujemy zmienną y i dostaniemy równanie $7x = 14$, z którego $x = 2$. Znowu, wstawiając obliczone x do któregokolwiek z równań (1.1.) dostaniemy y. Tak na marginesie, rozwiązaniem układu (1.1.) jest para $x = y = 2$.

Nie jest naszym celem ćwiczenie rozwiązywania układów równań. Chcemy zwrócić uwagę na to, że nie każde równanie warto rozwiązywać jedną z dwóch powyższych metod (nie każde się też da w ten sposób rozwiązać). Tak jest np. z równaniem:

$$\begin{cases} y = x^2 - 16 \\ 3y - 2x = 8 \end{cases} \tag{1.2.}$$

Wstawiając bezpośrednio y z pierwszego do drugiego równania otrzymamy równanie kwadratowe, które oczywiście potrafimy rozwiązać, ale jest to dość czasochłonne. Można zauważyć, że przenosząc w drugim równaniu $2x$ na drugą stronę znaku równości dostaniemy $2x+8$, czyli $2(x+4)$. Z kolei wyrażenie x^2-16 w pierwszym równaniu możemy rozłożyć na $(x-4)(x+4)$ korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Ostatecznie dostajemy:

$$\begin{cases} y=(x-4)(x+4) \\ 3y=2(x+4) \end{cases} \tag{1.3.}$$

Jeśli teraz podzielimy stronami te równania (np. pierwsze przez drugie), to bardzo prosto dostaniemy $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}(x-4)$, a stąd już $x=\frac{14}{3}$. Ale przecież równanie kwadratowe, którego nie chcieliśmy rozwiązywać ma w ogólności 2 rozwiązania - my dostaliśmy jedno? Należy pamiętać, że dzieląc równania stronami, gdy wyrażenie $(x+4)$ uprościło się, założyliśmy po cichu, że jest ono jednocześnie różne od zera. Także dzieląc przez y przyjęliśmy $y\neq 0$. W tym założeniu tkwi klucz do znalezienia drugiego rozwiązania. Jeśli $x+4=0$, czyli $x=-4$, to oba równania układu (1.2.) są także spełnione (dostajemy $y=0$ z pierwszego i $3y=0$ z drugiego).
UWAGA! Należy pamiętać, że równanie kwadratowe (także będące jednym z równań układu) może mieć 2 rozwiązania.
UWAGA 2! Generalnie, często warto szukać wzoru skróconego mnożenia w równaniach.

Na koniec zastanowimy się nad rozwiązaniem układu równań, mającego fizyczny sens:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \tag{1.4.}$$

Tym razem x,y są znanymi liczbami (np. 7 i 15), a szukanymi są r i φ. Aby w najprostszy sposób znaleźć φ wystarczy podzielić równania stronami. Dostaniemy wtedy $\mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x}$, co jednoznacznie definiuje nam φ. Aby znaleźć r dodamy oba równania, podniesione wcześniej stronami do kwadratu. Dostaniemy wówczas: $x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi$, co przy zauważeniu jedynki trygonometrycznej da nam $r^2=x^2+y^2$.
Jak wspomnieliśmy, równanie (1.4.) ma znaczenie fizyczne - wyraża bowiem zależność położenia (x,y) punktu materialnego od promienia r i kąta obrotu φ w ruchu po okręgu. Równania te jednocześnie wiążą kartezjański układ współrzędnych z układem biegunowym (zwanym też polarnym), często wykorzystywanym w fizyce.

Zadania

Rozwiąż układy równań dwóch lub trzech zmiennych.

a) $\begin{cases} 6y=2x^2-18 \\ y-2=x+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+13=2y \\ 3x=2-y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x^2-4x=y+\frac{2}{3} \\ 2x-1=-3y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y=r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z=r\cos\vartheta \end{cases}$ e) $\begin{cases} 7a=3-4b \\ 2a=4b-5c+1 \\ a=2+5c \end{cases}$

1.2. Pochodna funkcji

Matematycy definiują pojęcie pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie $x = x_0$ jako granicę ilorazu różnicowego:

$$f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.5.}$$

Najczęściej oznaczamy pochodną na dwa sposoby: $f'(x)$ (czyt.: f prim od x) lub $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (czyt.: de f po de x). Dla konkretnej funkcji, np. $x^2 - 1$, napiszemy: $(x^2 - 1)'$.

W tym zawiłym wzorze występuje przynajmniej kilka znaków zapytania. Przede wszystkim, co to jest *granica funkcji*? Możemy sobie wyobrazić, że wędrujemy wzdłuż jakiejś krzywej (będącej wykresem jakiejś funkcji) - od dowolnego punktu $(x,f(x))$ do wybranego punktu $(x_0,f(x_0))$. Szukanie granicy funkcji w punkcie x_0 jest właśnie tym zbliżaniem się wzdłuż krzywej nieskończenie blisko punktu $(x_0,f(x_0))$. Obliczanie granicy w punkcie praktycznie sprowadza się do obliczania wartości funkcji w tym punkcie. Należy jednak pamiętać, że to nie to samo - funkcja może nie mieć wartości w punkcie $x = x_0$ (bo jest np. nieciągła w tym punkcie), ale granica w tym punkcie może istnieć. Dla przykładu, zastanówmy się nad granicą funkcji tangens w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (pamiętamy jak wygląda jej wykres). Wędrując wzdłuż tangensoidy np. od początku układu współrzędnych do punktu $x_0 = \frac{\pi}{2}$ widzimy, że wykres zmierza asymptotycznie do nieskończoności. Zatem granica tangensa w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$ wynosi: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}x) = +\infty$. Granicę taką nazwiemy *niewłaściwą*. Jednocześnie punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ nie należy do dziedziny funkcji tangens.

Drugim nowym pojęciem jest zapewne *iloraz różnicowy*. Jest to po prostu iloraz dwóch różnic - w liczniku różnica wartości funkcji f w punktach x oraz x_0, a w mianowniku różnica argumentów. Obliczanie granicy takiego ilorazu nie jest tak bezpośrednie jak w przypadku opisanym powyżej przy obliczaniu granicy funkcji. Zauważmy, że jeśli w ilorazie wprost wstawimy $x = x_0$, to dostaniemy wyrażenie $\frac{0}{0}$, które w matematyce nazywa się symbolem nieoznaczonym i nie ma sensu. Granicę ilorazu różnicowego liczy się sprytnie, tzn. należy odpowiednio przekształcać iloraz tak, by pozbyć się problemu z symbolem nieoznaczonym. Sposób obliczania granicy ilorazu różnicowego, czyli znajdowania pochodnej funkcji w punkcie, opiszemy na dwóch przykładach.

Należy jeszcze skomentować jedną rzecz. Wzór (1.5.) definiuje pochodną w punkcie x_0, czyli $f'(x_0)$. Jest to liczba, np. $f'(x_0) = 5$. Mówimy też o pochodnej jako o funkcji pochodnej dowolnego argumentu x, czyli $f'(x)$. Definicja (1.5.) tak samo dobrze definiuje funkcję pochodną, bo x_0 w tej definicji jest zupełnie dowolne.

Przykłady

1. Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$ korzystając z definicji pochodnej.

$$f'(x_0) = \left(x^2\right)'|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

Zauważmy, że rzeczywiście kładąc $x = x_0$ dostaniemy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$, co musimy jakoś obejść. Rozłóżmy różnicę kwadratów $x^2 - x_0^2$ na iloczyn $(x - x_0)(x + x_0)$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia. Wtedy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Ostatnie przejście to po prostu podstawienie $x = x_0$. Mogliśmy podzielić przez $(x - x_0)$, bo x nigdy nie jest równe x_0 (liczymy granicę!). Ponieważ punkt x_0 jest zupełnie dowolny (nic o nim nie zakładaliśmy), to możemy uogólnić wynik do dowolnego punktu x i powiedzieć, że pochodną funkcji $f(x) = x^2$ jest funkcja $f'(x) = 2x$.

2. Teraz znajdźmy pochodną funkcji $f(x) = \sin x$.

$$f'(x_0) = (\sin x)'\,|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \tag{1.6.}$$

Wykorzystamy teraz wzór trygonometryczny na różnicę sinusów:
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Wtedy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\frac{x+x_0}{2} \tag{1.7.}$$

W ostatnim kroku przenieśliśmy „2" z licznika do mianownika. W ten sposób dostaliśmy wyrażenie typu: $\frac{\sin u}{u}$, co w granicy $u \to 0$ daje 1, zgodnie z pewnym matematycznym twierdzeniem. W naszym przypadku $u = \frac{x-x_0}{2}$ i rzeczywiście zdąża do zera, gdy $x \to x_0$. Skoro tak, to pozostaje nam jedynie obliczyć granicę z kosinusa, znajdującego się w (1.7.), co zrobimy po prostu podstawiając za x.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\frac{x+x_0}{2} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\to 1}\cos\frac{x+x_0}{2} = \cos\frac{2x_0}{2} = \cos x_0 \tag{1.8.}$$

Pochodną funkcji sinus jest więc funkcja kosinus: $(\sin x)' = \cos x$.

Szukanie pochodnej funkcji przy użyciu definicji (1.5.) jest uciążliwe i nierzadko trudne. Dlatego chcąc obliczyć pochodną dowolnej funkcji, najczęściej korzystamy ze wzorów na pochodne funkcji podstawowych, takich jak wielomian, funkcje trygonometryczne, czy wykładnicze. Poniżej podajemy pochodne prostych funkcji, za pomocą których można znajdować pochodne także funkcji bardziej skomplikowanych. Należy jednak pamiętać, że każdy z tych wzorów został kiedyś przez kogoś wyprowadzony z definicji (1.5.), z czego my teraz korzystamy dla wygody. Dla kompletności podajemy też reguły, wg których należy liczyć pochodne dla wyrażeń zawierających kilka funkcji, w szczególności dla funkcji złożonych. W sekcji Przykłady poniżej pokażemy też jak stosować te wzory dla prostych przypadków.

Pochodne wyższych rzędów (np. drugą pochodną) liczymy jako pochodną pochodnej niższego rzędu (np. druga pochodna jest pochodną pierwszej pochodnej itd.). Zapisujemy to tak (na przykładzie drugiej pochodnej):

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \tag{1.9.}$$

(czyt.: f bis od x, de dwa f po de x kwadrat). W fizyce, dla oznaczenia pochodnej po czasie, używa się czasem specyficznej notacji z kropką. Np. $\dot{x}$ albo $\dot{x}(t)$ oznacza $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, podobnie druga pochodna to $\ddot{x}$ itd.

Pochodne podstawowych funkcji

$f(x)$	c	$c\cdot g(x)$	x^α	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}x$	e^x	$\ln x$
$f'(x)$	0	$c\cdot g'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$\frac{1}{x}$

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} \qquad (f(g))' = f'(g)\cdot g'$$

Tabela 1.1.: Pochodne podstawowych funkcji i prostych operacji na dwóch funkcjach.

Przykłady

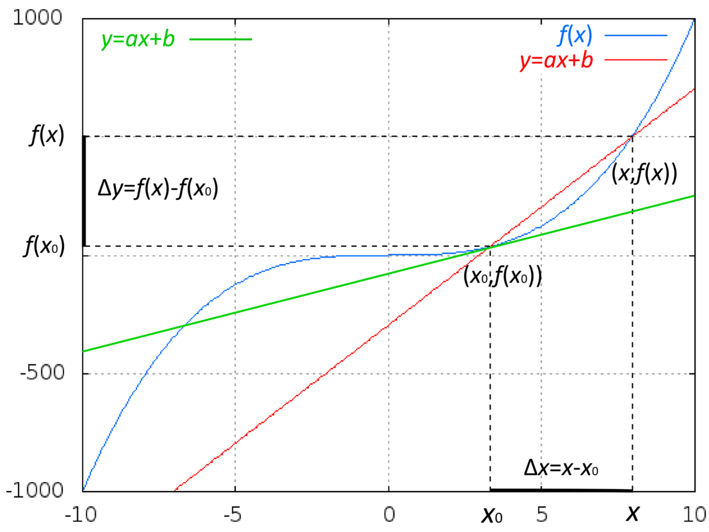
3. $(3 + x^5)' = 5x^4$
4. $\left(\frac{1}{2}\sin x\right)' = \frac{1}{2}\cos x$
5. $(3x^2 \cos x)' = 2\cdot 3x\, \cos x + 3x^2(-\sin x) = 6x\cos x - 3x^2 \sin x$
6. $\left(\frac{2}{x^2}\right)' = 2\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 2\cdot\frac{-2}{x^3} = \frac{-4}{x^3}$ albo $\left(\frac{2}{x^2}\right)' = \left(2x^{-2}\right)' = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$
7. $[(5 - x^3)^2]' = 2\,(5 - x^3)\cdot(-x^3)' = 2\,(5 - x^3)\cdot(-3x^2) = -6x^2(5 - x^3)$
8. $(3\,\cos(x^2 - 1))' = -3\,\sin(x^2 - 1)\cdot 2x = -6x\sin(x^2 - 1)$

Interpretacja geometryczna

Teraz zastanowimy się nad geometryczną interpretacją pochodnej funkcji. Jeśli spojrzymy na Rysunek 1.1. to łatwo odgadniemy interpretację ilorazu różnicowego. $f(x)-f(x_0)$ jest długością pionowego odcinka Δy, natomiast $x - x_0$ jest długością poziomego odcinka Δx. Stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest tangensem kąta oznaczonego jako α, a ten z kolei jest współczynnikiem kierunkowym prostej siecznej oznaczonej kolorem czerwonym.
Iloraz różnicowy jest więc współczynnikiem kierunkowym siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0,f(x_0))$ oraz $(x,f(x))$. Pamiętamy, że granica ilorazu różnicowego przy $x \to x_0$ jest pochodną funkcji w punkcie x_0. Jeśli zbliżymy się z punktem $(x,f(x))$ nieskończenie blisko punktu $(x_0,f(x_0))$, tak jak każe nam granica przy $x \to x_0$, to sieczna (kolor czerwony) stanie się styczną (kolor zielony) w punkcie x_0. Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie x_0 jest więc taka:

Pochodna $f'(x_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej w punkcie x_0 do krzywej będącej wykresem funkcji $f(x)$.

Ciekawy wniosek wypływa z warunku zerowania się pochodnej w danym punkcie. Odpowiada to sytuacji, gdy parametr kierunkowy stycznej jest równy 0, a więc styczna jest funkcją stałą. Ta sytuacja z kolei oznacza, że funkcja ma w tym punkcie tzw. *lokalne ekstremum* - tzn. minimum bądź maksimum. O ekstremum lokalnym można myśleć jak o wartości najmniejszej bądź największej funkcji w pewnym małym zakresie argumentów. Jeśli więc będzie nas interesowało znalezienie argumentu, dla którego dana funkcja ma lokalne minimum lub maksimum, wystarczy, że przyrównamy pochodną tej funkcji do zera i z tego warunku obliczymy argument x. Jest to tzw. warunek konieczny występowania ekstremum.



Rysunek 1.1.: Ilustracja interpretacji graficznej siecznej i pochodnej.

Zadania

a) Korzystając z definicji pochodnej (1.5.) oblicz pochodną funkcji $f(x) = 1/x^2$ oraz $g(x) = \cos x$. Dla ambitniejszych: $h(x) = x^n$.

b) Korzystając ze wzorów na pochodne podstawowych funkcji oblicz:
$(x^6 - 3x + 2)'$, $\left(\sin x - \frac{1}{x}\right)'$, $[(1-x)e^x]'$, $(\ln x + 3\cos x)'$, $\left(\frac{x^3 e^{-x^2}}{x-1}\right)'$

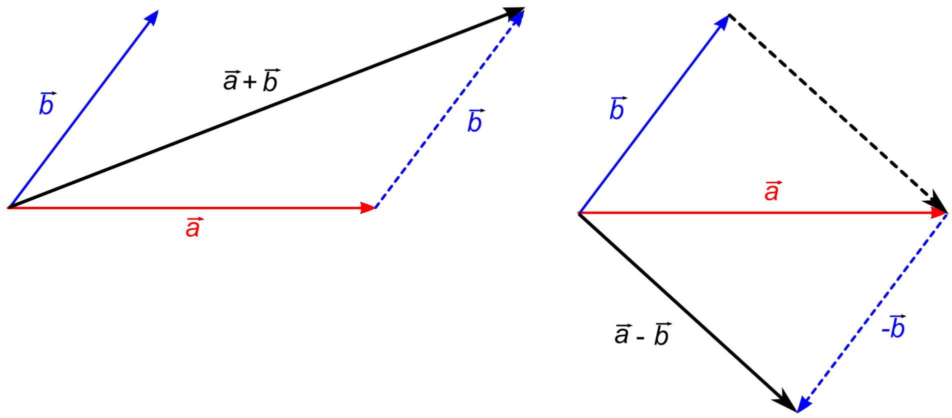
c) Proszę znaleźć równanie prostej stycznej do krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = 3 + 2x^2 + x^3$ w dwóch przypadkach: w punkcie $x_0 = 1$ oraz punkcie $x_0 = 0$. *Uwaga. Do znalezienia wyrazu wolnego 'b' w równaniu prostej trzeba wykorzystać fakt, że punkt* $(x_0, f(x_0))$ *należy zarówno do krzywej, jak i stycznej.*

1.3. Elementy rachunku wektorowego

Rachunek wektorowy jest działem matematyki bardzo potrzebnym fizyce. Wiele wielkości fizycznych jest wektorem (np. prędkość czy siła), wobec tego trzeba znać elementy rachunku wektorowego, aby dobrze rozumieć ich opis.

Wektor jest pojęciem matematycznym, który można definiować z różnym stopniem trudności. Najprościej można powiedzieć, że jest do odcinek zorientowany w przestrzeni (prościej: strzałka), do którego opisu nie jest potrzebny układ odniesienia czy współrzędnych. Żyje własnym życiem. Matematycy nazywają taki wektor swobodnym, jego początek można zaczepić gdziekolwiek. W oparciu o taką definicję można wprowadzić technikę dodawania lub odejmowania wektorów bazującą na metodzie równoległoboku (Rysunek 1.2.). Suma dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest również wektorem, którego początek znajduje się w początku wektora $\vec{a}$ (pierwszego), a koniec w końcu wektora $\vec{b}$ (drugiego). Na Rysunku 1.2. widać, że taka konstrukcja jest równoważna znajdowaniu dłuższej przekątnej równoległoboku zbudowanego przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Podobnie definiujemy różnicę wektorów $\vec{a} - \vec{b}$: jest to suma wektora $\vec{a}$

i wektora $-\vec{b}$. Z Rysunku 1.2. wynika z kolei, że taka konstrukcja jest równoważna znajdowaniu krótszej przekątnej równoległoboku. W obu przypadkach - sumy i różnicy - wektor traktujemy jak swobodny.



Rysunek 1.2.: Geometryczne dodawanie i odejmowanie wektorów.

W fizyce jednak, wektory nie są swobodne. Mają 4 cechy (dobrze znane ze szkoły):

- kierunek
- zwrot
- punkt przyłożenia
- długość

Pierwsze dwie cechy (kierunek i zwrot) są dość oczywiste, choć w mowie potocznej często mylone. Kierunek jest prostą, na której leży wektor, natomiast zwrot jest orientacją wektora wzdłuż kierunku (np. w lewo lub prawo). Ważne jest to, że wektor w fizyce jest zaczepiony do ciała, obiektu, punktu itd. Nie jest swobodny. I tak np. chcąc na schemacie zaznaczyć wektor siły ciężkości, z jaką Ziemia przyciąga masę, wektor oznaczający siłę ciężkości zaczepiamy w środku tej masy. Czasem zdarza się, że rysujemy na schematach sam wektor (bez punktu przyłożenia) - np. przyśpieszenie ziemskie $\vec{g}$ w przypadku zadań z rzutami. Dajemy wtedy do zrozumienia, że omawiamy ruch ciała *w polu działania przyciągania ziemskiego*, a więc każde ciało odczuwa przyśpieszenie $\vec{g}$, w szczególności to, którym się zajmujemy. Oczywiście wektor $\vec{g}$ też ma punkt przyłożenia - w każdym poruszającym się w polu ziemskim ciele - czego wyraźnie nie zaznaczamy.
Długość wektora (zwana też wartością) jest już ściśle powiązana z wyborem układu współrzędnych, jaki wybierzemy. Inna będzie długość wyrażona w jednostkach '1cm', a inna w jednostkach '2mm'. Np. metrowy sznurek mierzy 100 jednostek pierwszych ('1cm'), a 500 jednostek drugich ('2mm').

Skoro już wspomnieliśmy o wyborze układu współrzędnych, to wprowadźmy matematyczny opis wektora jako zestaw liczb określających jego współrzędne. Dla prostoty zajmiemy się wektorami na płaszczyźnie, co łatwo uogólnimy na trzy wymiary, i wybierzemy kartezjański układ współrzędnych. W ogólnym przypadku możemy sobie wyobrazić, że zarówno początek jak i koniec wektora są punktami, które mają jakieś współrzędne - np. wektor $\overrightarrow{AB}$ ma początek w punkcie $A = [x_A, y_A]$ i koniec w punkcie $B = [x_B, y_B]$. Liczby w nawiasie kwadratowym oznaczają współrzędne punktów na płaszczyźnie (stosuje się także nawias okrągły).

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ obliczymy następująco:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A] \tag{1.10.}$$

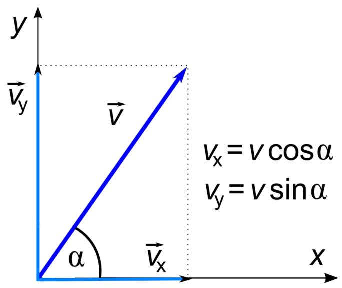
Układ odniesienia możemy wybrać dowolnie, w szczególności tak, żeby jego początek znajdował się w początku wektora $\overrightarrow{AB}$, wtedy, jak każdy łatwo zauważy, punkt A otrzymuje współrzędne [0,0], a wektor $\overrightarrow{AB} = [x_B, y_B]$.

Długość wektora $\vec{a} = [a_x, a_y]$ możemy obliczyć z tw. Pitagorasa:

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{1.11.}$$

W tym miejscu chcemy omówić bardzo ważną z punktu widzenia dalszej części opracowania kwestię. Mianowicie rozkład wektora na składowe. Tak jak wspominaliśmy, układ odniesienia może być wybrany dowolnie - najlepiej tak, żeby był dla nas wygodny. Jeśli wektor jest w tym układzie zorientowany pod jakimś kątem do osi, to najczęściej, aby opis zagadnienia był wygodny, znajdujemy jego składowe. Dotyczy to np. takich problemów jak rzut poziomy czy ukośny lub ruch na równi pochyłej.
Rozkład na składowe nie jest niczym nowym, opiera się po prostu na definicji funkcji trygonometrycznych, szczególnie sinus i kosinus. Rysunek 1.3. definiuje dwie składowe wektora $\vec{v}$ (np. prędkości) poprzez sinus i kosinus kąta między tym wektorem a osią poziomą. Czasem, przez nieuwagę lub zawiłości rysunku/zadania, znajdowanie składowych może stanowić problem, dlatego proponujemy prostą, „szkolną" regułę, przypominającą jak rozkład przeprowadzić:

Składowa wektora przy kącie jest związana funkcją kosinus,
składowa naprzeciw kąta - funkcją sinus.



Rysunek 1.3.: Ilustracja rozkładu wektora na składowe.

Iloczyn skalarny

Znamy dwa rodzaje mnożenia wektorów. Pierwszy - iloczyn skalarny - jest w efekcie liczbą (skalarem). Aby znaleźć iloczyn skalarny dwóch wektorów, znając ich współrzędne, wystarczy, że wykonamy sumę iloczynów odpowiednich współrzędnych:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = [a_x, a_y, a_z] \circ [b_x, b_y, b_z] = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.12.}$$

Jeśli znamy długości wektorów oraz kąt α pomiędzy nimi, wtedy stosujemy taki wzór:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a\, b \cos\alpha \tag{1.13.}$$

W oparciu o wzór (1.13.) definiuje się także kąt pomiędzy wektorami. Ważną „funkcją" iloczynu skalarnego jest detekcja wektorów prostopadłych. Zgodnie z (1.13.) iloczyn skalarny takich wektorów jest 0, bo $\cos\alpha = 0$. Zatem

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \tag{1.14.}$$

Iloczyn skalarny ma oczywiście zastosowania w fizyce - najprostszym przykładem jest tu definicja pracy jako iloczyn skalarny siły działającej na ciało i wektora przemieszczenia ciała: $W = \vec{F} \circ \Delta\vec{r}$. Wszelkiego rodzaju strumienie (np. przepływającej cieczy lub prądu elektrycznego) są także wyrażone przez iloczyny skalarne (ściślej: całki powierzchniowe, które w swojej strukturze mają iloczyn skalarny).
Iloczyn skalarny daje także informację o rzucie prostokątnym jednego wektora na drugi. Zauważmy, że składowa równoległa wektora $\vec{b}$ mierzona wzdłuż wektora $\vec{a}$ ma długość $b\cos\alpha$ (oznaczmy ją przez b_a) - wynika to z prostego rozkładu wektora na składowe w wybranej bazie. Przyjmujemy, że kąt między wektorami wynosi α. Przekształcając wzór (1.13.) mamy:

$$b_a = b\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a} \tag{1.15.}$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów podzielony przez długość jednego z nich jest długością rzutu prostokątnego wektora drugiego na pierwszy. Taka interpretacja iloczynu skalarnego dotyczy nie tylko prostych wektorów, ale także funkcji wektorowych, co jest przedmiotem bardziej zaawansowanych działów analizy matematycznej i ma zastosowanie np. w mechanice kwantowej.

Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ dwóch wektorów jest również wektorem o następujących cechach: jest on prostopadły zarówno do wektora $\vec{a}$, jak i $\vec{b}$, ma zwrot wynikający z reguły prawej dłoni (śruby prawoskrętnej), a jego wartość zdefiniowana jest wzorem:

$$c \equiv |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a\,b\sin\alpha \tag{1.16.}$$

gdzie α jest kątem pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Jeśli znamy współrzędne wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, to współrzędnych wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ szukamy obliczając wyznacznik zbudowany z odpowiednich wierszy: w pierwszym ustawiamy wersory osi, w drugim współrzędne wektora $\vec{a}$, a w ostatnim współrzędne wektora $\vec{b}$. Wyznacznik obliczamy zgodnie z algebrą macierzową.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{z} \tag{1.17.}$$

W powyższym wzorze pojawiły się symbole $\hat{x}$,$\hat{y}$,$\hat{z}$ - są to tzw. *wersory* osi kartezjańskiego układu współrzędnych. Wersorem nazywamy bezwymiarowy wektor, którego długość jest równa 1 (czyli $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$).

Poprzez iloczyn wektorowy definiujemy wszelkie momenty w fizyce - np. moment siły ($\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}$) lub moment pędu ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$), a także np. związek prędkości liniowej i kątowej ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$), lub związek przyśpieszenia stycznego i kątowego ($\vec{a}_s = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$). Jest to więc

bardzo przydatny w fizyce element rachunku wektorowego.
Iloczyn wektorowy interpretujemy czasem jako zorientowane pole powierzchni rozpiętej między dwoma wektorami. Pamiętamy prostą definicję pola powierzchni równoległoboku o bokach a i b, między którymi występuje kąt α: $P = ab\sin\alpha$. To pole to nic innego jak długość iloczynu wektorowego, $|\vec{a} \times \vec{b}|$, zgodnie z definicją (1.16.). Powierzchnię obszaru (niekoniecznie płaskiego) możemy traktować wektorowo (w ramach bardziej zaawansowanych rozważań analizy matematycznej), dlatego mówimy, że obszar może być zorientowany - iloczyn wektorowy zależy od kolejności wektorów. W efekcie zorientowane pole powierzchni, $\vec{P} = \vec{a} \times \vec{b}$, może być dodatnie lub ujemne, w zależności od kolejności wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Iloczyn mieszany

Iloczyn mieszany to iloczyn trzech wektorów w postaci:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \circ (\vec{c} \times \vec{a}) \tag{1.18.}$$

Jest on oczywiście liczbą (skalarem), ze względu na iloczyn skalarny jako działanie zewnętrzne w powyższym wyrażeniu. Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego jest taka, że jest to objętość graniastosłupa rozpiętego przez wektory $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$.

Przykłady

1. Mamy trzy wektory $\vec{a}$ = [0, -3, 1], $\vec{b}$ = [1, 2, -1], $\vec{c}$ = [-2, 2, 6]. Sprawdźmy, czy są wśród nich pary wektorów prostopadłych.

   Wiemy, że kąt między wektorami prostopadłymi jest prosty, a jego kosinus jest 0. Skorzystamy więc z faktu, że iloczyn skalarny wektorów prostopadłych zdefiniowany wzorem (1.13.) musi wynosić 0. Do obliczenia tego iloczynu, wykorzystamy z kolei wzór (1.12.), ponieważ znamy współrzędne wektorów.
   $\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -7$
   $\vec{a} \circ \vec{c} = 0$
   $\vec{b} \circ \vec{c} = -4$
   Widzimy więc, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{c}$ są prostopadłe.
   Teraz znajdziemy iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$ wg wzoru (1.17.):

   $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (3-2)\,\hat{x} + (1-0)\,\hat{y} + (0+3)\,\hat{z} = [1{,}1{,}3]$$

   Na koniec obliczmy iloczyn mieszany $\vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b})$.
   $\vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = [-2{,}2{,}6] \circ [1{,}1{,}3] = 18$
   Przypomnijmy, że w ten sposób obliczyliśmy objętość graniastosłupa zbudowanego przez te trzy wektory. Przy okazji zastanówmy się jak rozumieć ew. ujemny wynik iloczynu mieszanego (może taki przecież być). Oznacza to tylko tyle, że wektory w iloczynie wektorowym są zamienione miejscami, tak że tworzą lewoskrętny układ (zamiast prawoskrętnego używanego przez nas). Wynik obliczenia objętości będzie więc modułem ujemnej liczby, którą otrzymaliśmy.

Zadania

1. Znajdź pary wektorów prostopadłych spośród trójki: $\vec{a} = [1{,}0,-3]$, $\vec{b} = [4,-2{,}2]$, $\vec{c} = [3{,}2{,}1]$. Jakie są kąty pomiędzy wszystkimi parami wektorów? Ile wynosi objętość graniastosłupa zbudowanego przez te wektory?

2. Mamy parę wektorów $\vec{u} = [m{,}0{,}n]$, $\vec{v} = [1{,}2{,}-1]$, gdzie $m{,}n$ są nieznanymi parametrami. Wiedząc, że wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są do siebie prostopadłe, oraz że ich suma jest równoległa do osi x, oblicz m i n. *Wskazówka. O równoległości wektorów możemy wnioskować z wartości iloczynu wektorowego.*

3. Proszę wykazać, że objętość graniastosłupa zbudowanego przez trzy wektory jest dana przez ich iloczyn mieszany.

1.4. Elementy rachunku całkowego*

Nie jest naszą intencją, aby wyłożyć tutaj kompletną teorię rachunku całkowego, ani nawet podać precyzyjne definicje i twierdzenia. Tego wszystkiego Czytelnik dowie się na kursie Analizy matematycznej. Całki są jednak potrzebne w fizyce, szczególnie na akademickim poziomie. Dlatego podamy tutaj najważniejsze informacje dot. rachunku całkowego i przedstawimy jego proste zastosowania w fizyce. *Rozdział ten można początkowo pominąć, szczególnie w pierwszych tygodniach nauki fizyki na uczelni.

1.4.1. Całka nieoznaczona

Rozróżniamy dwa rodzaje całek w analizie matematycznej: **całki nieoznaczone** i **całki oznaczone**. Właściwie są to zupełnie inne twory - te pierwsze są funkcjami, natomiast te drugie to liczby. Jednak ich definicje i sposób obliczania są bardzo zbliżone. Zacznijmy więc od podstawowych informacji dot. całek nieoznaczonych.

Zasadniczo całkowanie jest procedurą odwrotną do różniczkowania. W tym sensie powiemy, że całka (nieoznaczona) jest **funkcją pierwotną** dla tzw. funkcji podcałkowej. Zapiszemy to tak:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + const \qquad \Leftrightarrow \qquad [F(x)]' = f(x) \tag{1.19.}$$

Symbol całki to charakterystyczne wydłużone „S”, funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową. Należy zawsze pamiętać, aby po funkcji $f(x)$ jeszcze „pod całką” dopisać różniczkę $\mathrm{d}x$ - jawnie sugeruje ona „po czym” jest całkowanie (może być oczywiście po innej niż x zmiennej, a jest to szczególnie ważne w przypadku funkcji wielu zmiennych, np. $f(x{,}y{,}z)$, kiedy musimy wiedzieć, po czym ma być całka). Czasem $\mathrm{d}x$ zapisuje się tuż po symbolu całki, np. $\int \mathrm{d}x f(x)$. Funkcja $F(x)$, która jest wynikiem całki, to tzw. funkcja pierwotna. Definicja (1.19.) właściwie od razu podaje nam sposób obliczania całki nieoznaczonej:

Całka nieoznaczona z funkcji $f(x)$ to taka funkcja $F(x)$, której pochodna $[F(x)]'$ jest funkcją podcałkową $f(x)$.

Czyli żeby obliczyć całkę z jakiejś funkcji, musimy „zgadnąć” jakiej innej funkcji jest ona pochodną. Np. całką z funkcji $f(x) = x$ będzie funkcja $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, bo pochodną $F(x)$ jest z powrotem $f(x) = x$. Tutaj wyjaśnia się też, dlaczego w definicji (1.19.) potrzebna jest stała *const* (nazywamy ją stałą całkowania) - całkę nieoznaczoną jesteśmy w stanie znaleźć tylko z dokładnością do stałej, bo pochodna ze stałej wynosi, jak wiemy, zero. Występowanie stałej całkowania nie zmienia więc postaci funkcji podcałkowej (pochodna z $\frac{1}{2}x^2 + const$ to nadal x). Jeżeli funkcja $f(x)$ ma jakiś sens (np. fizyczny, typu prędkość jako funkcja czasu $v(t)$ - funkcję nazwaliśmy tutaj v, a zmienną t), to stała całkowania też ma sens. Samym w sobie zadaniem jest jej wyznaczenie. Służą do tego tzw. **warunki początkowe** lub **warunki brzegowe**. Nie będziemy się tym więcej zajmować, ale powiemy sobie tylko, że w przypadku funkcji $v(t)$ (wektor prędkości w ruchu prostoliniowym), całka $\int v(t)\mathrm{d}t = x(t) + x(0)$ (ponieważ prędkość $v(t)$ jest pochodną położenia po czasie, to całką z prędkości jest właśnie położenie $x(t)$, rozważamy tu przypadek jednowymiarowy). Stała całkowania natychmiast nabiera znaczenia jakiegoś stałego położenia, np. na początku ruchu, dlatego od razu zapisaliśmy ją jako $x(0)$. Jeżeli np. wiemy, że w chwili początkowej ciało znajdowało się w początku układu odniesienia (jest to właśnie warunek początkowy), to napiszemy $x(0) = 0$. Jeżeli nie interesują nas tego typu zagadnienia, to stałą całkowania jako oczywistą możemy śmiało pomijać w zapisie.

Podstawową metodą obliczania całek nieoznaczonych jest właśnie „zgadywanie", czyli ustalenie postaci takiej funkcji, której pochodną jest nasza funkcja podcałkowa. W Przykładach całkujemy różne funkcje w ten sposób. Jeżeli funkcja podcałkowa nie jest prostą funkcją, całka może nie być łatwa do zgadnięcia. Nie wszystkie zasady dot. różniczkowania (patrz: ostatni wiersz tabeli 1.1.) obowiązują w przypadku całkowania. Prawdą jest, że całka sumy lub różnicy funkcji może być zapisana jako suma lub różnica całek:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x \tag{1.20.}$$

Także stałą, która mnoży funkcję podcałkową można wyłączyć przed znak całki: $\int c\cdot f(x)\mathrm{d}x = c\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$. Natomiast nie ma prostych reguł dla iloczynu lub ilorazu funkcji, albo funkcji złożonych.

Przykłady

1. $\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + const$, bo $(x^3)' = 3x^2$
2. $\int (6x^6 - 2)\mathrm{d}x = \int 6x^6\mathrm{d}x - \int 2\mathrm{d}x = \frac{6}{7}x^7 - 2x + const$, bo $(x^7)' = 7x^6$
3. $\int \frac{10}{x^4}\mathrm{d}x = -\frac{10}{3x^3} + const$, bo $(x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$
4. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + const$, bo $(-\cos x)' = -(\cos x)' = \sin x$
5. $\int \cos^2 x\mathrm{d}x = ||\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))|| = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{2}\cos(2x)\mathrm{d}x$ $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + const$, bo $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$ (mogliśmy zapisać jedną stałą całkowania, która jest sumą dwóch stałych pochodzących od dwóch całek nieoznaczonych)
6. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + const$, bo $(\ln x)' = x^{-1}$.
7. $\int \left(\frac{4}{t^2} - \mathrm{e}^{2t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{4}{t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + const$, bo $\left(-\frac{4}{t}\right)' = \frac{4}{t^2}$ oraz $(\mathrm{e}^{2t})' = 2\mathrm{e}^{2t}$.

1.4.2. Metody całkowania

Oprócz „zgadywania” istnieje wiele „bardziej mądrych” reguł całkowania i sposobów na obliczanie bardziej złożonych całek. Podamy tutaj tylko dwie najważniejsze, choć nie będziemy później z nich korzystać w dalszej części skryptu.

Całkowanie przez podstawienie

Idea jest prosta: za jakieś wyrażenie w funkcji podcałkowej (albo nawet całą funkcję) podstawiamy nową zmienną (dokonujemy zamiany zmiennych) taką, która ma potencjalnie ułatwić nam całkowanie. Szybkie zauważenie tego, jakie podstawienie będzie wygodne, jest kwestią praktyki i doświadczenia, choć są też ogólne zasady. Ważne jest, aby pamiętać przy zamianie zmiennych, że zmienia się zmienna całkowania i różniczkę $\mathrm{d}x$ musimy wyrazić przez różniczkę nowej zmiennej. Liczymy wtedy tzw. jawną pochodną, np. podstawienie $x^2 = u$ (u jest nową zmienną) po obliczeniu jawnej pochodnej jest następujące: $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. Stąd możemy wyznaczyć $\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$. Przykłady:

$$\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \cos x = u \\ -\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = -\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u =$$

$$= -\ln u + const = |u = \cos x| = -\ln(\cos x) + const'$$

Tutaj za całe wyrażenie $\sin x dx$ mogliśmy podstawić $-\mathrm{d}u$, co znacznie ułatwiło nam dalsze obliczenia. Ogólnie: zawsze, gdy w funkcji podcałkowej licznik jest pochodną mianownika, wynik całkowania jest logarytmem naturalnym z mianownika. Dla porządku zapisaliśmy powyżej inne stałe całkowania *const* i *const'*, bo dotyczą one różnych zmiennych u lub x; zazwyczaj nie będziemy na to zwracać uwagi.

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{1}{2}\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^u + const = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + const$$

Oczywiście $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ i podobnie całka $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + const$.

Całkowanie przez części

Tu także mamy do czynienia z prostą ideą, która wynika z zasad różniczkowania iloczynu funkcji: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f'(x)g(x) = [f(x)g(x)]' - f(x)g'(x)$. Jeżeli funkcję podcałkową możemy zapisać jako iloczyn dwóch wyrażeń, z których jedno jest prostą pochodną (którą obliczymy w głowie), a drugie po zróżniczkowaniu będzie prostsze niż przedtem, to całkowanie przez części jest idealną metodą. Zapiszmy definicję metody, którą łatwo zrozumiemy na prostym przykładzie:

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \qquad (1.21.)$$

Efektywnie nadal zostaje nam do policzenia jedna całka, ale tym razem inna, która może okazać się dużo prostsza. Oczywiście po drodze zauważyliśmy, że $\int [f(x)g(x)]'\mathrm{d}x = f(x)g(x) + const$, zgodnie z definicją całki nieoznaczonej. Sprawdźmy kilka przykładów:

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{lcl} f'(x) = \mathrm{e}^x & \rightarrow & f(x) = \mathrm{e}^x \\ g(x) = x & \rightarrow & g'(x) = 1 \end{array} \right| = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x + const$$

Drugi przykład jest może nieco mniej oczywisty, bo jako jedno z wyrażeń budujących funkcję podcałkową weźmiemy jedynkę:

$$\int \ln x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{lll} f'(x) = 1 & \to & f(x) = x \\ g(x) = \ln x & \to & g'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + const$$

Metodę całkowania przez części często wykorzystujemy w przykładach z funkcjami trygonometrycznymi. Czasem całkowanie przez części trzeba wykonać więcej niż raz (gdy całka po prawej stronie w równaniu (1.21.) nadal nie jest prosta).

$$\int \sin^2 \varphi \cos \varphi \mathrm{d}\varphi = \left| \begin{array}{lll} f' = \cos \varphi & \to & f = \sin \varphi \\ g = \sin^2 \varphi & \to & g' = 2 \sin \varphi \cos \varphi \end{array} \right| = \sin^3 \varphi - 2 \int \sin^2 \varphi \cos \varphi \mathrm{d}\varphi$$

Dostaliśmy w wyniku taką samą całkę, jak wyjściowa. Ale to dobrze, bo w takim razie, po przeniesieniu stronami, mamy:

$$3 \int \sin^2 \varphi \cos \varphi \mathrm{d}\varphi = \sin^3 \varphi \quad \Rightarrow \quad \int \sin^2 \varphi \cos \varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + const$$

1.4.3. Całka oznaczona

Całka oznaczona jest szczególnie ważna w fizyce, dlatego teraz poświęcimy jej trochę uwagi. W odróżnieniu od całki nieoznaczonej, całka oznaczona jest liczbą, a mówiąc precyzyjniej: różnicą wartości funkcji pierwotnej w dwóch punktach, nazywanych granicami całki oznaczonej. Liczba ta w fizyce będzie miała także jednostkę. Całka oznaczona ma więc **granice całkowania**. Są to takie skrajne wartości zmiennej całkowania a i b, w zakresie których interesuje nas zmienność funkcji podcałkowej: $x \in (a,b)$ (domknięcie przedziałów nie ma tutaj większego znaczenia, przynajmniej dla naszych potrzeb). Zapis całki oznaczonej różni się tylko tym, że podajemy dolną ($x = a$) i górną ($x = b$) granicę całkowania przy znaku całki:

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \tag{1.22.}$$

Jak liczyć całkę oznaczoną? Przepis podaje tzw. podstawowe twierdzenie rachunku całkowego (wzór Newtona-Leibnitza):

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \tag{1.23.}$$

Całka oznaczona o granicach całkowania (a,b) jest równa różnicy wartości funkcji pierwotnej w górnej granicy $F(b)$ i wartości funkcji pierwotnej w dolnej granicy $F(a)$.

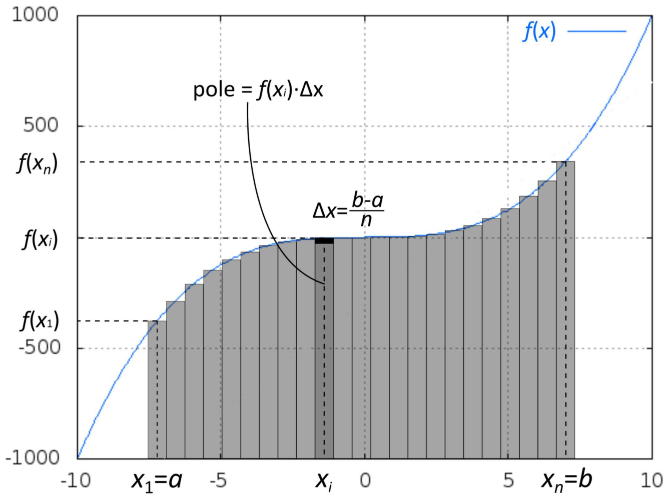
Żeby więc obliczyć całkę oznaczoną, trzeba najpierw znaleźć funkcję pierwotną, czyli obliczyć całkę nieoznaczoną. Zauważmy przy tym, że nie ma potrzeby zapisywania stałej całkowania (ona znika), bo odejmując dwie wartości funkcji pierwotnej w dwóch punktach odejmujemy od siebie także dwie te same stałe całkowania. W wyniku całki oznaczonej nie zapisujemy więc stałej całkowania.

Tak jak pochodna funkcji w punkcie (która jest liczbą) ma interpretację geometryczną, tak całka oznaczona (także liczba) również ma interpretację geometryczną. Całka $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$

jest wielkością pola powierzchni po wykresem funkcji $f(x)$ między punktami $x = a$ oraz $x = b$. Chodzi tu o pole między krzywą $f(x)$ a osią x (spójrz na Rysunek 1.4.). Ta interpretacja wynika wprost z definicji całki oznaczonej. Jeśli wyobrazimy sobie, że obszar pod krzywą między punktami a i b podzielimy na wąskie paseczki o (nieskończenie małej) szerokości $\mathrm{d}x$, to wyrażenie $f(x) \cdot \mathrm{d}x$ jest polem wąskiego prostokąta wychodzącego z punktu x na osi. Całkowanie po zmiennej x to nic innego jak sumowanie tych wyrażeń, czyli dodawanie pól kolejnych prostokątów. Nie będziemy tutaj wchodzić w szczegóły, ale definicję całki oznaczonej można zapisać w postaci granicy następującej sumy:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{1.24.}$$

Przedziały Δx stają się nieskończenie wąskie, jeśli liczba przedziałów n staje się nieskończona. Żeby więc powyższa suma była całką (pole powierzchni było dokładnie polem pod krzywą, a nie polem prostokątnych pasków) musimy obliczyć granicę $n \to \infty$, co jest równoważne granicy $\Delta x \to 0$. Pole pod krzywą, która w danym obszarze przyjmuje ujemne wartości (np. sinusoida w przedziale $(-\pi,0)$) jest ujemne, a w obszarze o dodatnich wartościach (sinusoida w przedziale $(0,\pi)$ - dodatnie.



Rysunek 1.4.: Ilustracja interpretacji graficznej całki oznaczonej jako pola pod krzywą.

Korzystając z powyższej definicji (1.24.) można obliczyć każdą całkę, podobnie jak z definicji pochodnej możemy policzyć każdą pochodną. Jest to jednak bardzo niepraktyczne i właściwie nigdy tego nie robimy. W kursie Analizy matematycznej Czytelnik pozna więcej interpretacji geometrycznych całek, np. dla funkcji wielu zmiennych (pole powierzchni bocznej lub objętość brył obrotowych itd.). Granice całkowania mogą być zupełnie dowolne. Jeśli jednak są sobie równe, to wynik takiej całki jest trywialny - zero (pole obszaru między tą samą prostą $x = a$ jest przecież zerowe). Jeśli jedna z granic jest nieskończona (lub obie są), to całkę oznaczoną nazywamy wtedy **całką niewłaściwą**. Taka całka może być **zbieżna** lub nie, tzn. jej wartość może być skończona lub nieskończona (pole pod parabolą w zakresie $x \in (0,\infty)$ jest nieskończone).

Całki oznaczone znajdują szerokie zastosowanie w fizyce. Takie wielkości jak praca, entropia, strumień pola magnetycznego itd. mają ogólnie definicje w postaci całek, w dodatku oznaczonych, bo fizyka wymaga określonego zakresu zmienności pewnych wielkości (np. jest sens mówić o pracy pewnej siły na określonej drodze itp.). Całki w fizyce są najczęściej więc oznaczone. Co więcej, mogą to być bardziej skomplikowane całki niż te omawiane powyżej. Np. praca jest tak naprawdę całką krzywoliniową po pewnej trajektorii w przestrzeni (wzdłuż której przesuwane jest ciało pod wpływem siły). Możemy mówić o całkach krzywoliniowych, powierzchniowych, objętościowych, skierowanych i nieskierowanych itd. W naszym podręczniku jednak nie będziemy mówić o takich przypadkach.

Przykłady

1. Oblicz następujące całki oznaczone:
   - $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$. Pole pod parabolą o równaniu $f(x) = x^2$ od zera do 1 wynosi więc 1/3 (w umownych jednostkach).
   - $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]\big|_0^\infty = -\mathrm{e}^{-\infty} - (-\mathrm{e}^0) = 0 + 1 = 1$. Mimo że całka jest niewłaściwa (nieskończoność w granicy), to jest zbieżna - pole pod eksponentą w tym zakresie argumentów jest skończone.
   - $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Zauważmy, że liczyliśmy pole pod sinusoidą w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, kiedy sinus jest raz ujemny, a raz dodatni. Przedział całkowania jest symetryczny względem $x = 0$, a funkcja sinus jest parzysta, dlatego pole (ujemne) po lewej stronie zera jest równe na moduł polu (dodatniemu) po prawej stronie. W efekcie oba pola dodają się do zera.

2. Oblicz pole powierzchni między krzywymi: $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = x + 2$ w przedziale $x \in (0,2)$.
   Mamy tutaj trochę inne zagadnienie, niż dotychczas. Nie chodzi o pole pod jedną krzywą (między krzywą a osią x), ale o pole pomiędzy krzywymi. Czytelnikowi zostawiamy naszkicowanie tej sytuacji. Można zauważyć, że w punkcie $x = 2$ obie krzywe (parabola i prosta) się spotykają. W punkcie $x = 0$ tak nie jest, ale to nie jest problem. Aby obliczyć pole między krzywymi, od pola pod krzywą położoną wyżej (w tym przypadku jest to prosta) odejmiemy pole pod krzywą położoną niżej (parabola). Gdyby w obszarze zmienności argumentu krzywe się przecinały, musielibyśmy uważnie zdefiniować obszary całkowania, żeby poprawnie dokonać tego odejmowania. Zapiszemy więc:

   $$P = \int_0^2 g(x)\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$

   co po scałkowaniu daje: $P = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]\Big|_0^2 = \frac{10}{3}$.

3. Obliczymy teraz trochę bardziej skomplikowaną całkę: $I = \int_0^4 x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.
   Jest to dość trudna całka. Spróbujmy najpierw zastosować metodę zamiany zmiennych w całce nieoznaczonej:

   $$\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{2}u\mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

Ta całka jest już o wiele prostsza. Można ją obliczyć przez części, a bardzo podobne obliczenia wykonaliśmy w przykładzie w podrozdziale 1.4.2.. Wynik jest:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}(u+1)+const$$

Teraz uwaga. Mieliśmy do policzenia całkę oznaczoną, musimy więc podstawić teraz granice całkowania. Po drodze zmieniliśmy jednak zmienną całkowania (zamiast x używamy teraz $u=x^2$). Naturalnie zmieniają się też granice całkowania w nowej zmiennej. Możemy w tej sytuacji zawsze postąpić na dwa sposoby:

(*i*) Zmienić granice całkowania tak, by były prawdziwe w nowych zmiennych. W naszym przypadku: dolna granica $(x=0)\to(u=0)$ oraz górna granica $(x=2)\to(u=4)$.

(*ii*) Równoważnie, możemy zawsze wrócić do pierwotnej zmiennej całkowania, czyli x, a granice wtedy pozostają niezmienione.

Wybór opcji (1) lub (2) nie wpływa na wynik końcowy. Sprawdźmy:

(*i*) $I=\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}(u+1)\right]\Big|_0^4=-\frac{5}{2\mathrm{e}^4}+\frac{1}{2}$

(*ii*) $I=\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}(x^2+1)\right]\Big|_0^2=-\frac{5}{2\mathrm{e}^4}+\frac{1}{2}$

Zadania

1. Oblicz całki nieoznaczone:
   a) $\int 6x^3\mathrm{d}x$　　b) $\int\left(\cos x-\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x$　　c) $\int\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$ (można przez podstawienie)
   d) $\int x^2\sin x\mathrm{d}x$ (przez części 2 razy)　　*e) $\int\frac{2x^3}{\cos^2(x^2)}\mathrm{d}x$ (najpierw podstawienie $x^2=u$, potem przez części, na końcu całka z tg$u$)

2. Korzystając z całki oznaczonej, oblicz pole powierzchni trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(0,3)$.

3. Oblicz całki oznaczone:
   a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\theta\mathrm{d}\theta$　　b) $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　c) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x\mathrm{d}x$ (narysuj)