

Instrukcje nr 2 i 3 – problemy cieplne

Część I. Wstęp. W pewnej grupie problemów przewodnictwa ciepła, zakłada się, że temperatura w analizowanej przestrzeni nie jest funkcją czasu. A zatem rozkład temperatury jest niezmienny w czasie zarówno na brzegu rozpatrywanego obszaru, jak również w jego wnętrzu. Ten typ problemu można podzielić na dwie podgrupy: z obszarami bezźródłowymi (np. rozkład temperatury w ścianie budynku), z obszarami zawierającymi źródła ciepła (np. rozkład temperatury w przekroju przewodu, w którym w wyniku przepływu prądu rozpraszana jest energia). Do analizy obu powyższych problemów, służą wówczas dwa równania różniczkowe cząstkowe, tj. równanie Laplace'a:

$$\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T(x, y, z) = 0$$

oraz równanie Poissona:

$$\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T(x, y, z) = -f(x, y, z)$$

gdzie: λ – przewodność cieplna (W/(mK)), $f(x, y, z)$ – objętościowa gęstość mocy (W/m³). Oraz

operatory gradientu:

$$\operatorname{grad} T(x, y, z) = \nabla T(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} T \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} T \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} T \mathbf{a}_z$$

i dywergencji:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

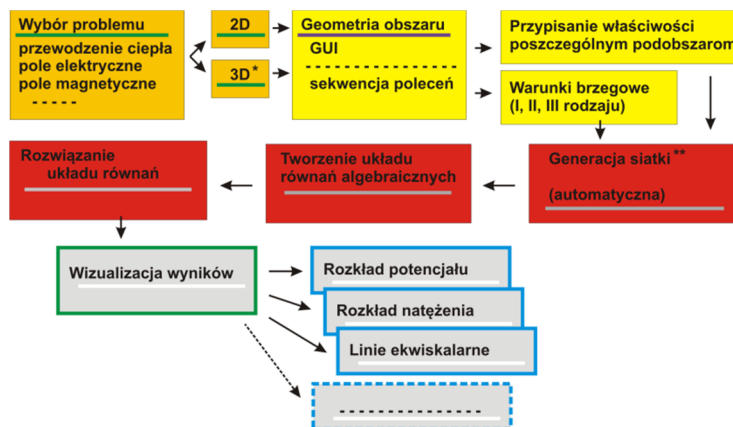
Gęstość strumienia ciepła wyraża fundamentalna zależność – równanie Fouriera – wiążąca rozkład przestrzenny temperatury z gęstością strumienia ciepła¹:

$$\mathbf{q}(x, y, z) = -\lambda \operatorname{grad} T(x, y, z)$$

gdzie: $\mathbf{q}$ – gęstość strumienia ciepła (W/m²).

Do rozwiązywania powyższych równań, służą specjalnie temu celowi dedykowane pakiety oprogramowania. Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych sprowadza się do zastępowania ich poprzez układy równań algebraicznych. Najczęściej wykorzystywana w tym celu jest Metoda Elementów Skończonych. Schemat postępowania w celu uzyskania rozwiązania został przedstawiony na rys.1.

¹ **UWAGA:** ciepło, praca i energia wyrażane są w tej samej jednostce (J), jednakże w zagadnieniach przewodzenia ciepła utarte jest sformułowanie strumień ciepła, który tak naprawdę jest strumieniem mocy (W) oraz gęstość strumienia ciepła – w tym przypadku jest to gęstość strumienia mocy (W/m²).



Rys.1. Schemat postępowania w pakietach polowych²³

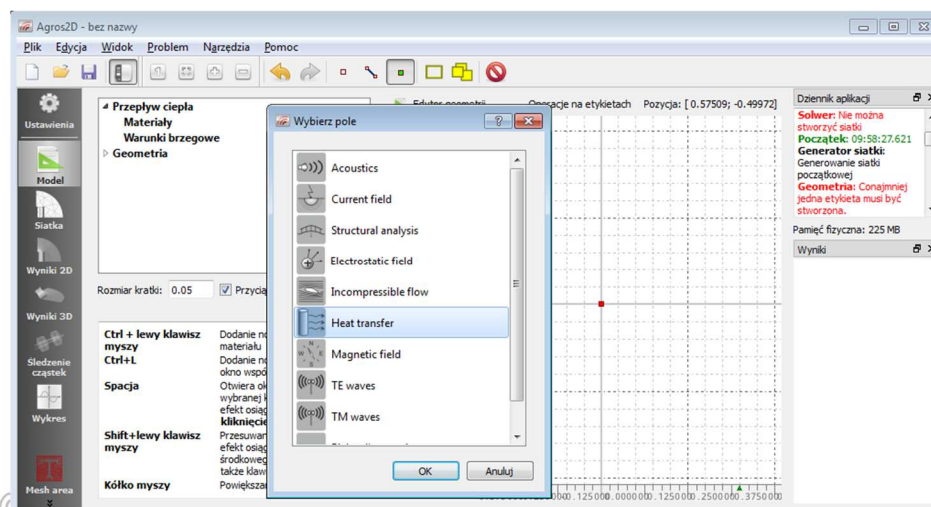
W tabeli 1, zebrano przewodności cieplne wybranych materiałów.

Tabela 1. Przewodności cieplne wybranych materiałów.

materiał	przewodność (W/(mK))	ciepło właściwe (J/(kg K))	gęstość (kg/m ³)
miedź	350 – 400	386	8940
aluminium	~200	897	2700
polwinit	0,140 – 0,170	2 303	860
cegła	0,800	840	1400 – 2200
beton	1	880	1800 – 2200
drewno	0,250	1200 – 1900	400 – 900
wełna szklana	0,032 – 0,040		
wełna mineralna	0,035 – 0,045		
piasek		800	1500 – 1800

Część II. Zastosowanie pakietu Agros2D.

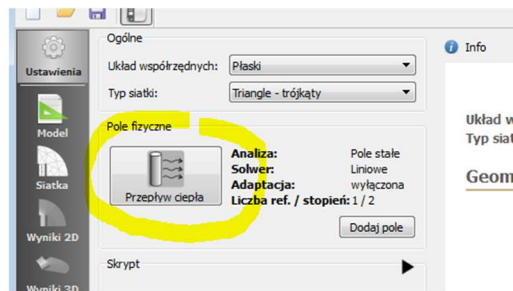
Wybór problemu:



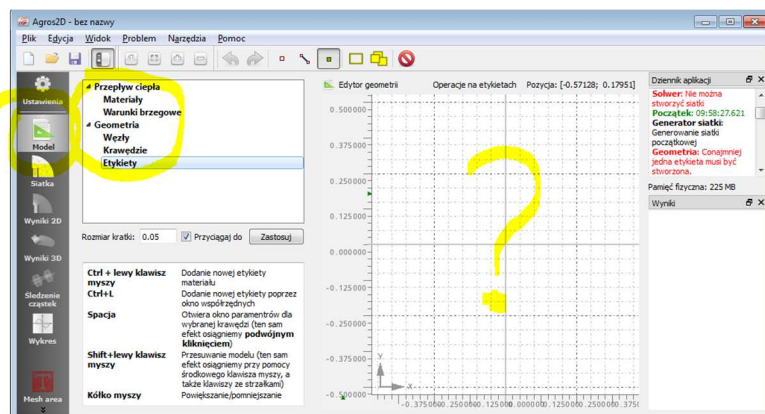
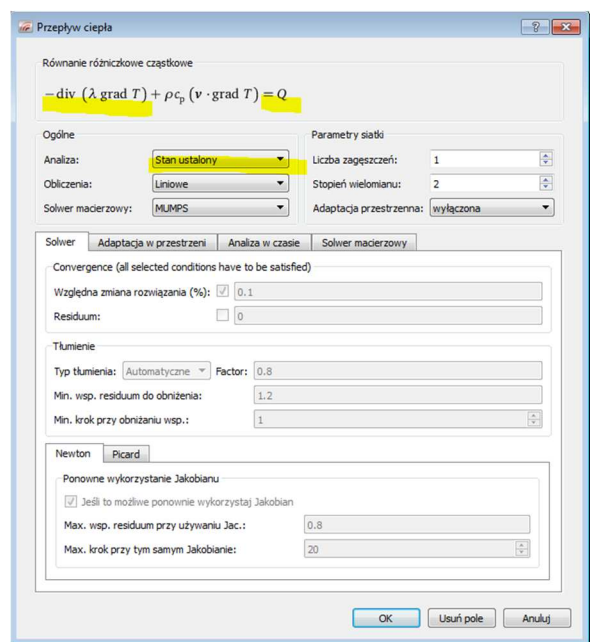
² Analizę trójwymiarową umożliwiają tylko niektóre spośród dostępnych pakietów oprogramowania.

³ Generacja siatek jest jednym z najbardziej skomplikowanych aspektów związanych z rozwiązywaniem zagadnień polowych.

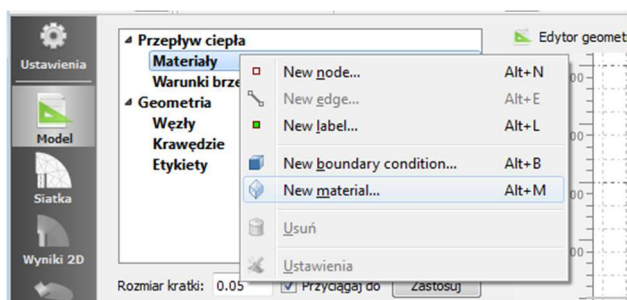
Klikając ikonę „Przepływ ciepła”



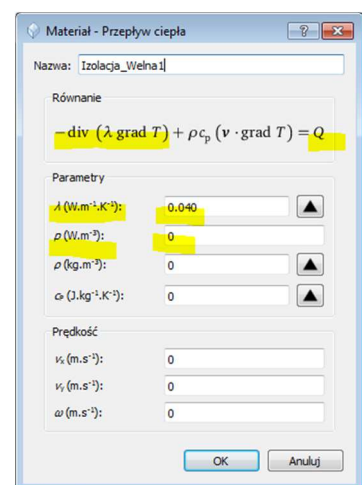
Otwieramy okno z wyborem odpowiedniego równania różniczkowego. W tym przypadku wybrać należy: *stan ustalony*.



Tworzenie modelu wymaga podania węzłów, krawędzi, a także warunków brzegowych i właściwości materiałów.

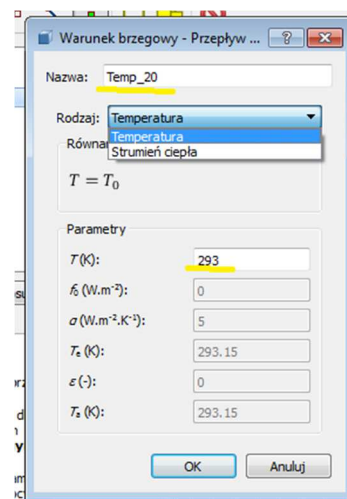
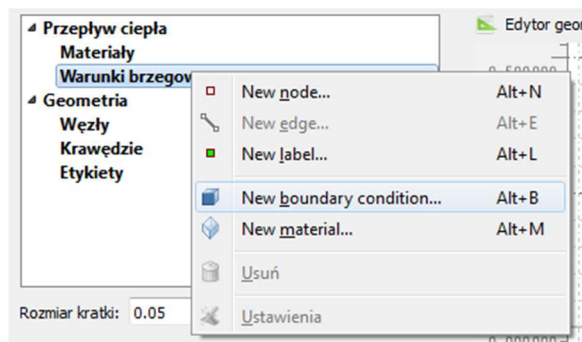


Wprowadzamy nazwę materiału (np. Izolacja_Welna1) oraz przewodność cieplną (tutaj: 0.040 W/(mK)). Ponieważ jest to obszar bezźródłowy, istotne jest zadanie gęstości objętościowej mocy równej $\rho = 0$ (W/m³).

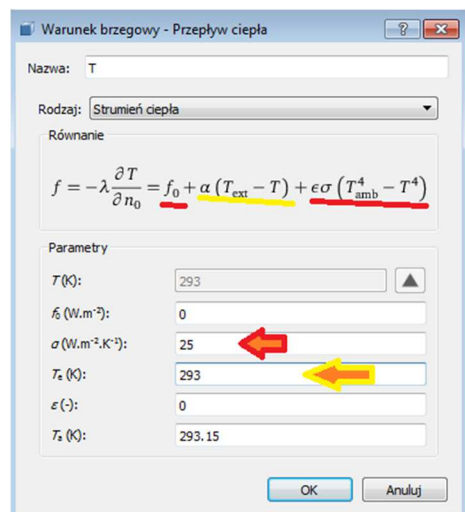
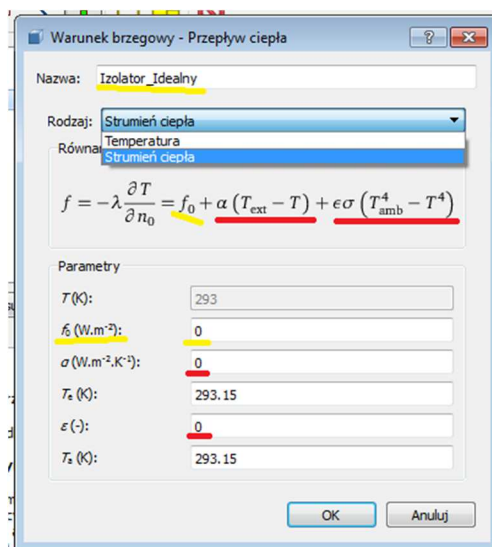


Specyfikacja warunków brzegowych.

W dalszej części przygotować należy warunki brzegowe, które mogą wystąpić na rozpatrywanym brzegu obszaru.



Należy w pierwszej kolejności wybrać rodzaj warunku. Albo tzw. warunek I rodzaju (Dirichleta), wprowadzając temperaturę, albo warunek II rodzaju (Neumanna), wprowadzając gęstość strumienia ciepła przez wybrany fragment brzegu – dla idealnego izolatora, gęstość strumienia musi wynosić 0. Pole wyboru („strumień ciepła”) umożliwia także zadawanie warunku III rodzaju (Robina), który uzależnia strumień ciepła od różnicy temperatur na brzegu obszaru i temperatury zewnętrznej. Pominięcie tego warunku następuje poprzez nadanie tzw. współczynnikowi wnikania ciepła (tutaj: σ) wartości równej 0.



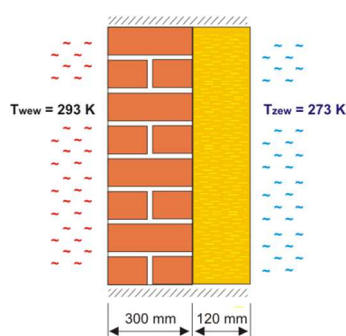
W przypadku wyboru warunku III rodzaju, należy określić wartość temperatury zewnętrznej oraz wprowadzić współczynnik wnikania ciepła. Przybliżone wartości współczynnika zebrano w tab.2.

Tabela 2. Współczynnik wnikania ciepła (dane z [3]).

material	Współczynnik wnikania α (W/(m ² K))
gazy	5 – 30
oleje	10 – 350
woda	100 – 1200
ciekłe metale	1000 – 7000

Część III. Zastosowanie pakietu Agros2D. Przykłady.

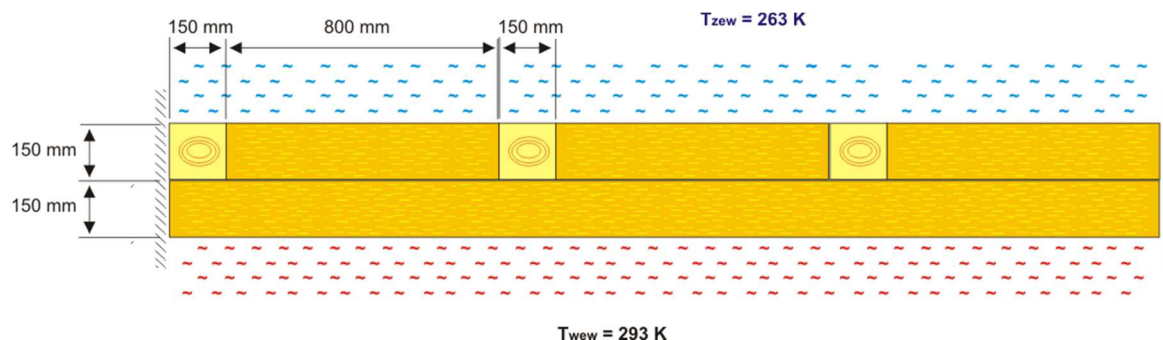
Przykład 1. Zasada ciągłości strumienia (ciepła).



Dane są: temperatura wewnątrz budynku i na zewnątrz (jak na rysunku). Przyjąć, że do ściany od góry i dołu przylega idealny izolator. Przyjąć przewodności poszczególnych podobszarów na podstawie tabeli 1, tj. dla cegły i wełny mineralnej.

- Użyć pakietu Agros2D w celu obliczenia i wizualizacji rozkładu temperatury w przekroju ściany utworzonej z dwóch warstw, tutaj: cegły i wełny mineralnej.
- Sprawdzić i porównać strumień ciepła przez poszczególne powierzchnie zewnętrzne rozpatrywanego obszaru.
- Porównać gęstość strumienia ciepła po obu stronach granicy rozdzielającej oba materiały.
- Sprawdzić, jak wpływa wysokość rozpatrywanego obszaru na gęstość strumienia ciepła na granicy materiał-otoczenie.
- Sprawdzić jak zmieni się strumień ciepła na granicy wełna-otoczenie, gdy: grubość jednego lub/i drugiego materiału wzrośnie dwukrotnie.

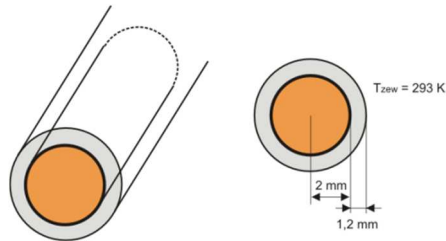
Zadanie 2. Dodatkowe. Planowana jest izolacja poddasza. Rysunek przedstawia istotny fragment połączenia dachu. Założono, że od strony zewnętrznej, zapewniono swobodny przepływ powietrza, a jego temperatura wynosi ($-10\text{ }^{\circ}\text{C}$). Temperatura wewnątrz budynku wynosi ($20\text{ }^{\circ}\text{C}$). Krokwie drewniane o wymiarach 15 cm X 15 cm, rozmieszczone są jak na rysunku.



Założono, że izolacja wykonana zostanie z dwóch warstw o grubości 15 cm każda. Jedna warstwa stanowi wypełnienie obszarów pomiędzy krokwiami, druga jest jednolita od strony wewnętrznej.

- A. Przyjąć, że jedna z warstw może być wykonana z wełny szklanej o przewodności 0,032 (W/(mK)) a druga z wełny o przewodności 0,040 (W/(mK)). Sprawdzić, czy wybór kolejności warstw ma znaczenie i wpływa na strumień ciepła wydostający się z pomieszczenia.
- B. Przyjąć, że cała izolacja wykonana jest z wełny o przewodności 0,040 (W/(mK)). Wyznaczyć wpływ przewodności drewna na strumień ciepła. Przyjąć, że przewodność drewna zmienia się od 0,200 do 0,450 (W/(mK)).

Przykład 3. Rozkład temperatury wewnątrz przewodnika i otaczającej go izolacji.



Rozpatrzyć przewód o grubości jak na rysunku. Przyjąć, że rdzeń wiodący prąd wykonany jest z miedzi a izolacja z polwinitu. Potraktować rdzeń jako podobszar, w którym rozpraszana jest energia. Przyjąć, że gęstość prądu w miedzi wynosi 2 A/mm². Na brzegu obszaru, zadać warunek I rodzaju – temperaturę równą (20°C).

- A. Obliczyć gęstość objętościową mocy czynnej (mocy rozpraszanej) w miedzi, według:

$$p_v = |\mathbf{j}| |\mathbf{E}| = \frac{|\mathbf{j}|^2}{\gamma_{\text{el_CU}}}$$

gdzie: p_v – gęstość objętościowa mocy czynnej (W/m³); $\gamma_{\text{el_CU}}$ – przewodność elektryczna miedzi ($55 \cdot 10^6$ (S/m)).

- B. Utworzyć model geometryczny rozpatrywanego zagadnienia; zadać warunki brzegowe oraz uwzględnić wewnętrzne źródło ciepła.
- C. Wyznaczyć temperaturę na granicy miedź-izolacja. Porównać odczytaną temperaturę, z temperaturą w osi przewodu i na granicy izolacja-otoczenie. Sprawdzić szybkość zmian temperatury w izolacji i w miedzi.
- D. Opracować i przedstawić w środowisku MatLab charakterystykę temperatury w osi przewodu w funkcji gęstości prądu.

Część IV. Przewodzenie ciepła – rozkład temperatury w funkcji czasu.

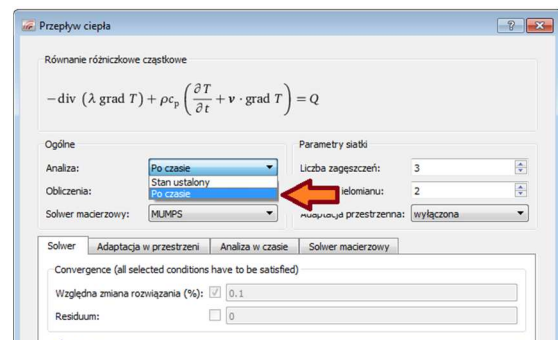
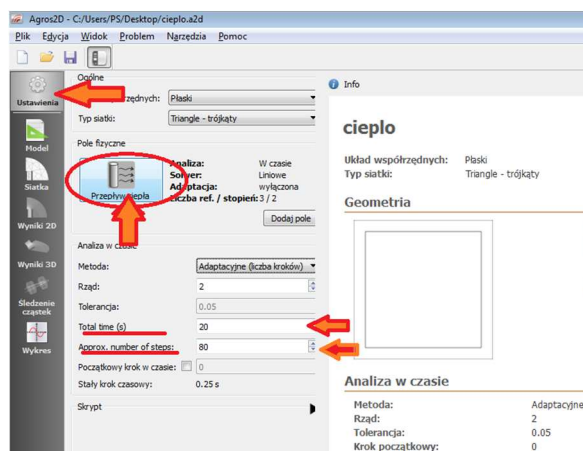
Nieustalone przewodzenie ciepła opisuje równanie:

$$C_w \rho \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial t} - \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T(x, y, z) = -f(x, y, z, t)$$

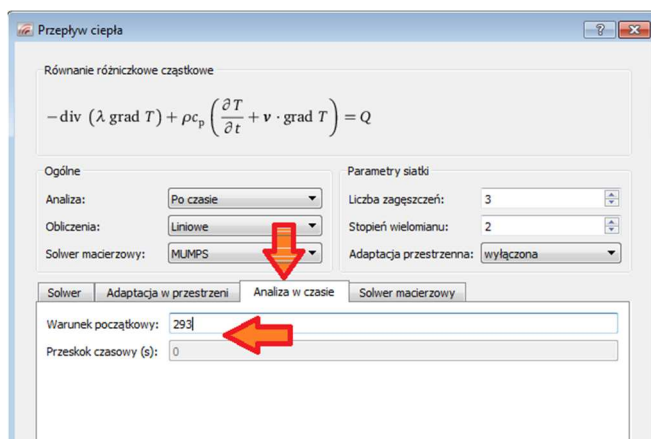
gdzie: C_w – pojemność cieplna (J/(kg K)), ρ – gęstość materiału (kg/m³), λ – przewodność cieplna (W/(mK)), $f(x, y, z, t)$ – objętościowa gęstość mocy (W/m³), t – czas.

Dodatkowe dane, jak pojemność cieplna oraz gęstość wybranych materiałów zebrano w tab.1.

Klikając „Ustawienia” zadać należy czas całkowity w którym analizowana jest dyfuzja ciepła a także przybliżoną liczbę kroków. Następnie należy otworzyć kolejne okno, klikając pole: „Przepływ ciepła”.



Z listy rozwijanej należy wybrać analizę „Po czasie”.



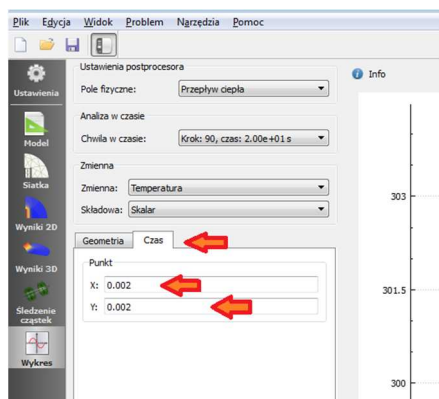
W zakładce „Analiza w czasie” należy określić **warunek początkowy** (temperaturę materiału w chwili t_0 ; tutaj zadano 293 K).

W dalszej kolejności należy postępować analogicznie jak w przypadku ustalonego rozkładu temperatury. Różnica polega na konieczności uwzględnienia – w parametrach użytych materiałów – także ciepła właściwego i gęstości.

Przykład 4. Przedstawić rozkład temperatury w czasie, w przewodzie o średnicy 4 mm, wykonanym z miedzi (bez izolacji), zasilanym prądem o gęstości 10 A/mm^2 . Przyjąć współczynnik wnikania ciepła na poziomie $5 \text{ (W/(m}^2\text{K))}$ oraz temperaturę zewnętrzną 20°C (293 K).

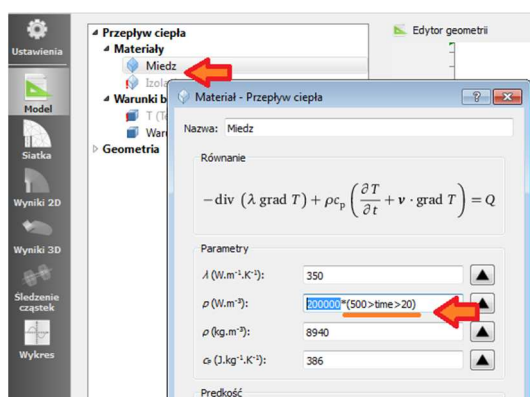
Zaprezentować wykres zmian temperatury w osi przewodu w czasie. Na rysunku zaznaczono strzałkami zakładki i pola, które należy w tym celu uzupełnić.

A) Przedstawić rozkład temperatury w przekroju przewodu w chwili t_0 oraz po 2, 5, 100 sekundach.

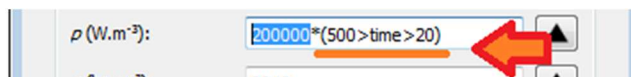


B) Zaprezentować wykres zmian temperatury (w czasie) w osi przewodu dla różnych wartości współczynnika wnikania ciepła (np. 5, 10, 30 $\text{W/m}^2\text{K}$).

C) Zaprezentować wykres zmian temperatury (w czasie) w osi przewodu, przy zadanym współczynniku wnikania ciepła ($30 \text{ W/m}^2\text{K}$) dla różnych wartości gęstości prądu, tj.: 1 A/m^2 , 5 A/m^2 , 10 A/m^2 , 25 A/m^2 , 100 A/m^2 .



D) Zaprezentować wykres zmian temperatury w osi przewodu, przy założeniu, że przewód jest obciążony w przedziale: $\langle 20 \text{ s}, 500 \text{ s} \rangle$.



E) Przedstawić wykres zmian temperatury w osi przewodu zasilanego prądem o gęstości danej zależnością: $j(t) = 5\sqrt{2} \sin(2\pi ft) \text{ A/m}^2$ (przyjąć $f=50 \text{ Hz}$).

F) Omówić możliwości i ograniczenia stosowane modelu w kontekście nieliniowości i zmiany stanu skupienia (miedzi i izolacji).

Literatura

1. Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer - Agros2D
http://www.agros2d.org/wp-content/uploads/flyers/agros2d_brochure.pdf
2. Tichonow A.N., Samarski A.A.: *Równania fizyki matematycznej*, PWN, 1963.
3. Taler J., Duda P.: *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2003.

UWAGI:

→ syrekp@agh.edu.pl

syrekp@agh.edu.pl