

Instrukcja nr 4 – pole elektrostatyczne

Część I. Wstęp. Analizę rozkładu pola elektrycznego¹ dokonuje się w celu określenia osiąganych wartości w wybranych podobszarach lub/i aby oszacować pojemność układu przewodników. Zagadnienia mogą być analizowane w obszarach bezźródłowych; wówczas w polu spełniona jest zależność:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(x, y, z) = 0$$

gdzie: $\mathbf{D}$ – indukcja pola elektrycznego (C/(m²)),

lub w obszarach, gdzie występuje ładunek elektryczny:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(x, y, z) = -\rho_V(x, y, z)$$

gdzie: ρ_V – gęstość objętościowa ładunku (C/(m³)).

W celu uwzględnienia właściwości rozpatrywanego środowiska, przypisuje się poszczególnym materiałom przenikalność elektryczną, która to pozwala powiązać indukcję z natężeniem pola elektrycznego:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\mathbf{D}(x, y, z)}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

gdzie: $\mathbf{E}$ – natężenie pola elektrycznego (V/m), oraz ϵ_r – przenikalność elektryczna względna, ϵ_0 – stała dielektryczna (przenikalność elektryczna próżni²).

Rozkład natężenia pola elektrycznego obliczany jest analitycznie lub za pomocą „programów polowych”, z wykorzystaniem potencjału pola elektrycznego. Natężenie i potencjał wiąże poniższa zależność:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = - \operatorname{grad} V(x, y, z)$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych, równania różniczkowe cząstkowe zastępuje się układami równań algebraicznych, których rozwiązanie umożliwia przedstawienie rozkładu potencjału pola elektrycznego. W obszarach bezźródłowych (bez ładunku) spełnione jest równanie Laplace’a postaci:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V(x, y, z) = 0$$

¹ Pole elektryczne – dokładnie: **składowa elektryczna pola elektromagnetycznego**

² Stała dielektryczna wynosi: $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ (F/m)

W obszarach, w których uwzględniony zostaje rozkład ładunku elektrycznego:

$$\operatorname{div} \varepsilon_r \varepsilon_0 \operatorname{grad} V(x, y, z) = -\rho_V(x, y, z)$$

W równaniach powyższych użyto – operator gradientu:

$$\operatorname{grad} V(x, y, z) = \nabla V(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} V \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} V \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} V \mathbf{a}_z$$

i dywergencji:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{D}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z$$

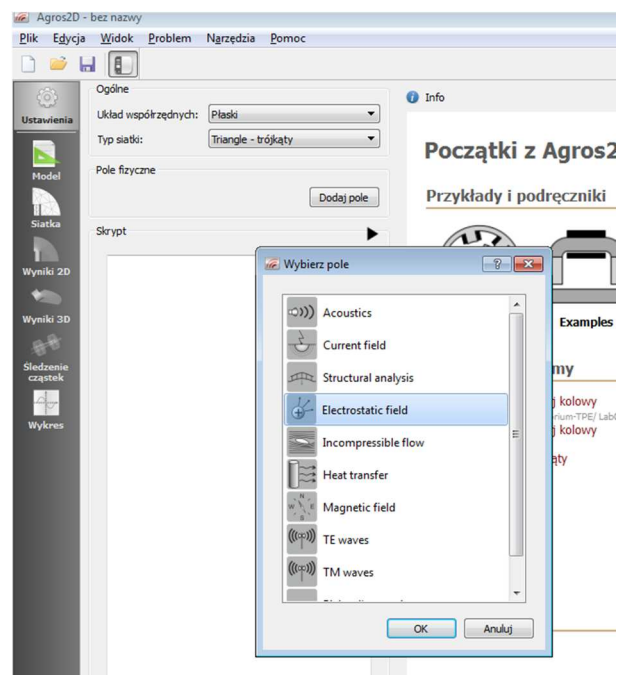
Do rozwiązywania powyższych równań, służą specjalnie temu celowi dedykowane pakiety oprogramowania – więcej na ten temat w instrukcji do poprzednich ćwiczeń. W tabeli 1, zebrano przenikalności i przewodności elektryczne wybranych materiałów.

Tabela 1. Przewodności.

material	przenikalność względna	przewodność elektryczna (S/m)
woda (0°C, 20°C, 100°C)	88, 80, 55	
beton	4,5	
polietylen	2,5	
papier	3,5	
guma	7	

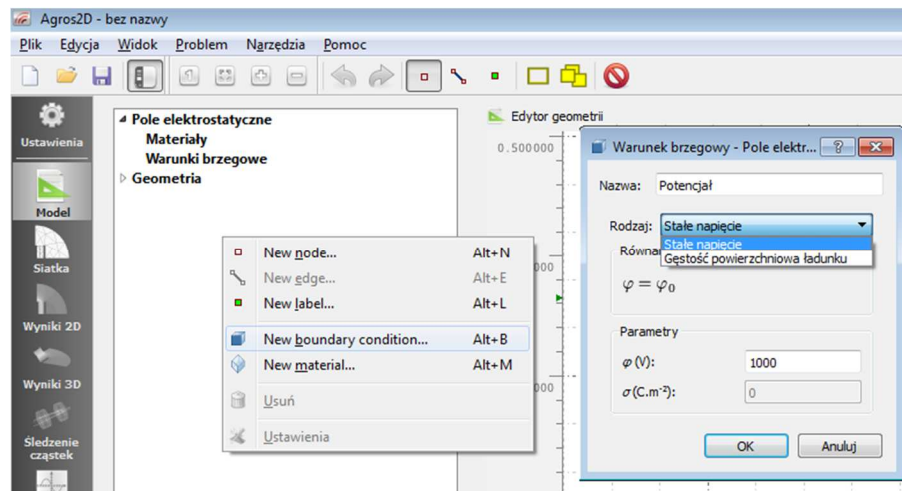
Część II. Zastosowanie pakietu Agros2D.

Wybór problemu – „Electrostatic field”:

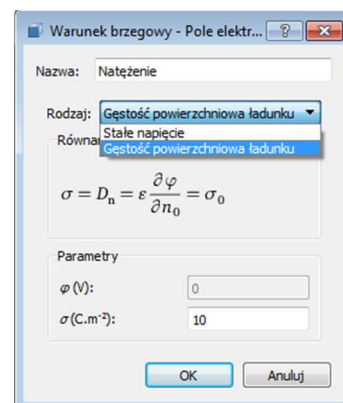


Warunki brzegowe w analizie rozkładu pola elektrostatycznego.

W analizie pola elektrycznego, dostępne są dwa warunki brzegowe. Warunek I rodzaju (Dirichleta) – ustalona wartość potencjału na wybranym fragmencie brzegu.

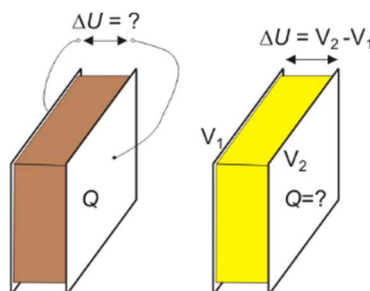


Warunek II rodzaju (Neumanna) – w programie Agros2D, zadaje si



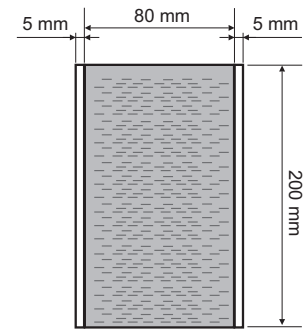
Część III. Wyznaczanie pojemności

Pojemność może być wyznaczona na 2 sposoby³: zakładając ładunek na okładkach lub zadając potencjały okładek (jak na rysunku).



³ Może także zostać obliczona na podstawie odpowiednich pomiarów.

Przykład 1a. Wyznaczyć pojemność kondensatora płaskiego. Kondensator ma wymiary jak na rysunku. Przyjąć, że szerokość wynosi 1 m. Przyjąć, że kondensator znajduje się w powietrzu, a przenikalność względna dielektryka pomiędzy okładkami wynosi 3,5.



syrekp@agh.edu.pl

Pojemność można obliczyć, przyjmując pewne założenia upraszczające (wymienić najważniejsze z nich), wówczas wzór ma postać:

Pojemność obliczana analitycznie wynosi wówczas:

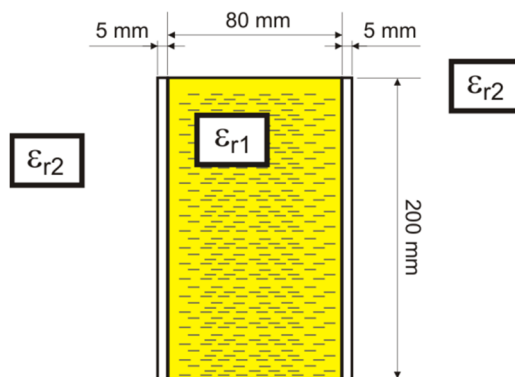
$C_A =$

Zadać odpowiednie warunki brzegowe i wyznaczyć pojemność w programie Agros2D. Pojemność wynosi:

$C_{NUM} =$

Ile wynosi różnica pomiędzy pojemnością wyznaczoną analitycznie oraz numerycznie?

Przykład 1b. Kondensator o wymiarach jak w przykładzie 1a znajduje się w próżni ($\epsilon_{r2} = 1$). Pomiedzy okładki kondensatora wstawiono dielektryk o przenikalności ϵ_{r1} . Wyznaczyć wpływ przenikalności względnej ϵ_{r1} dielektryka na błąd względny procentowy występujący przy obliczeniach analitycznych. Wyniki zestawić w tabeli.



Lp.	ϵ_{r1}	C_A	$C_{NUM} =$	$\delta_{\%}$
1	1			
2	2			
3	5			
4	10			
5	25			

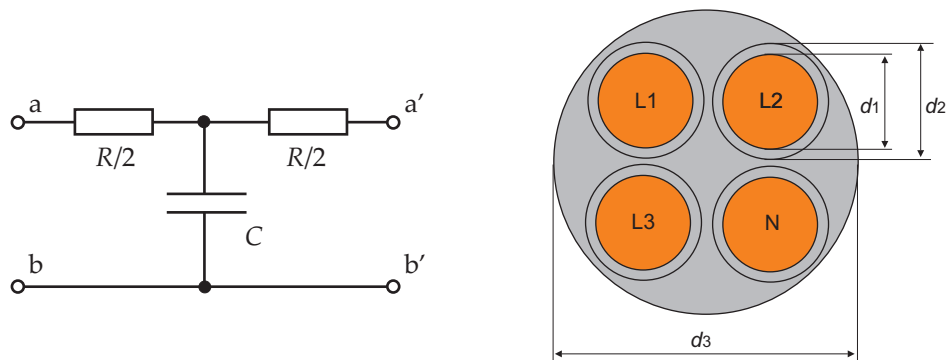
Przykład 1c. Dla przenikalności względnej $\epsilon_{r1} = 25$, zbadać wpływ gęstości siatki, zagęszczenia odcinków na krawędzi okładek, itp. na uzyskiwaną numerycznie wartość pojemności kondensatora.

Przykład 2. Wyznaczyć pojemność linii napowietrznej (jednofazowej) o przekrojach przewodów i wysokości nad ziemią jak na rysunku. Przyjąć, że długość linii wynosi 10 km (przewody aluminiowe) i dla tej długości podać parametry czwórnika⁴ typu „T”.



Przykład 3. Wyznaczyć pojemność linii kablowej i przedstawić parametry odpowiedniego czwórnika. Potraktować powierzchnię zewnętrzną kabla, jako otoczoną materiałem o stosunkowo wysokiej przewodności elektrycznej⁵. Materiał przewodzący stanowi miedź (Cu). Wymiary z rysunku wynoszą odpowiednio: $d_1 = 3$ mm, $d_2 = 4$ mm, $d_3 = 5,8$ mm. Przyjąć długość kabla równą 2 km.

Przyjąć, że przenikalność względna izolacji wynosi 2,5.

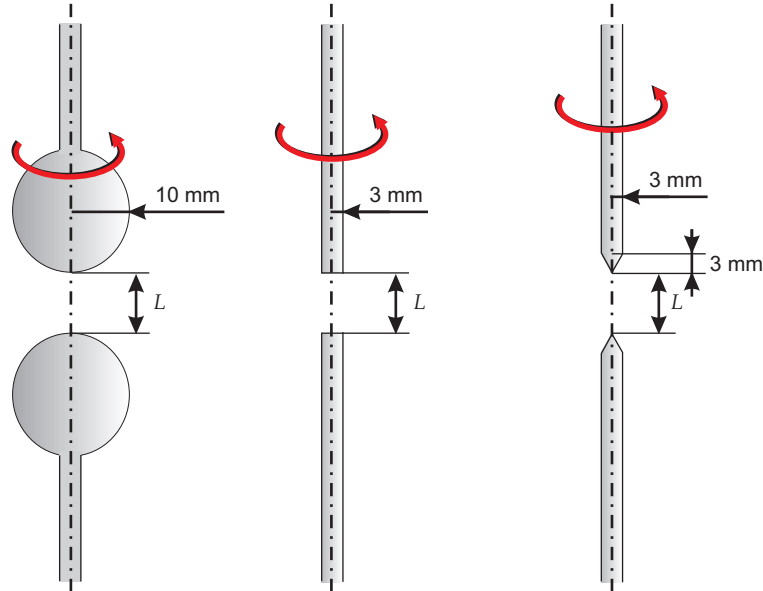


syrekp@agh.edu.pl

⁴ Jednym z najistotniejszych parametrów czwórnika jest indukcyjność linii. Jej wyznaczanie nie jest jednak tematem tych ćwiczeń, stąd zostaje pominięta.

⁵ Komentarz na zajęciach.

Przykład 4. Wyznaczyć rozkład natężenia pola elektrycznego w obszarze pomiędzy elektrodami o różnych kształtach⁶. Rozważyć zagadnienie osiowosymetryczne. Przyjąć, że różnica potencjałów pomiędzy elektrodami wynosi: $\Delta U = 5 \text{ kV}$. Przedstawić wykresy rozkładu natężenia PE wzdłuż osi symetrii (jak na rysunku).



syrekp@agh.edu.pl

⁶ Zwrócić uwagę na rozmiar siatki w miejscach występowania najwyższych wartości składowej elektrycznej i wpływ tego rozmiaru na uzyskiwane wyniki.