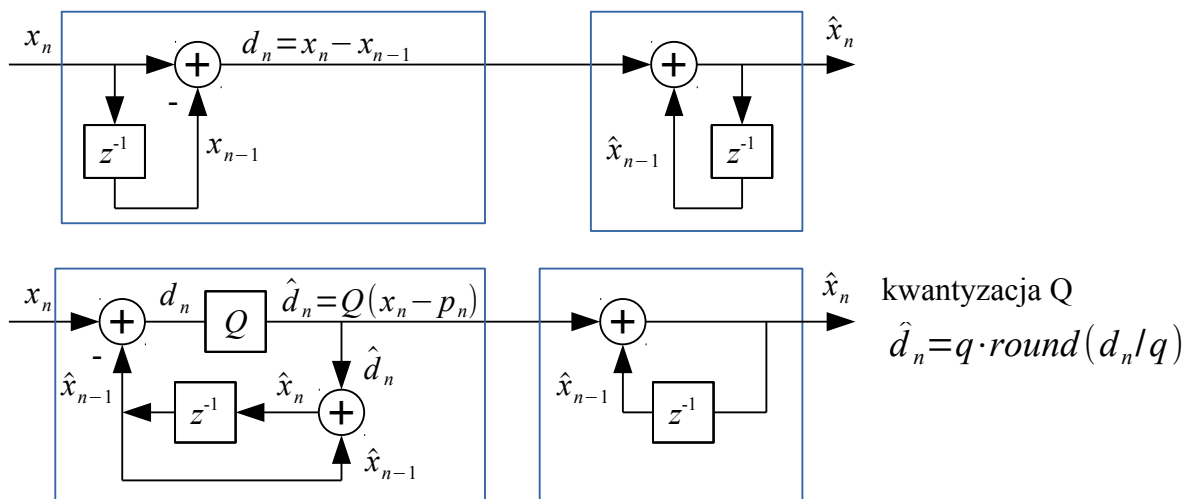
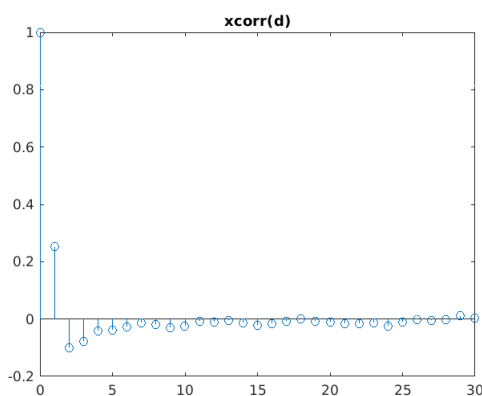
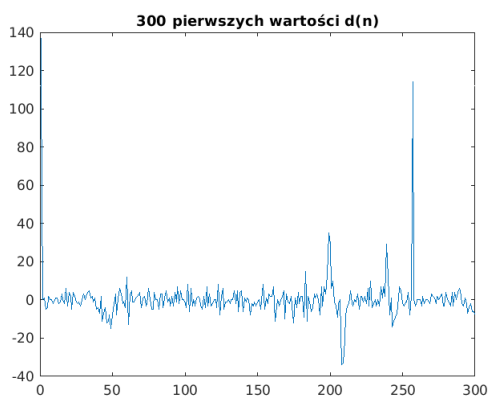
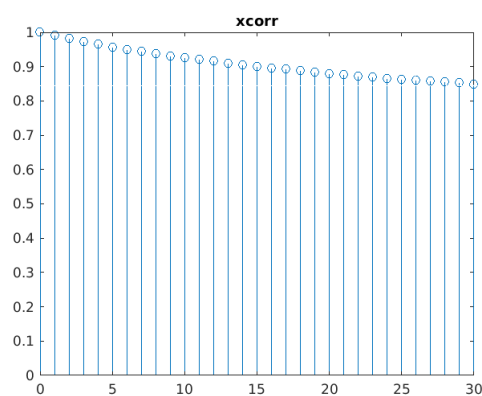
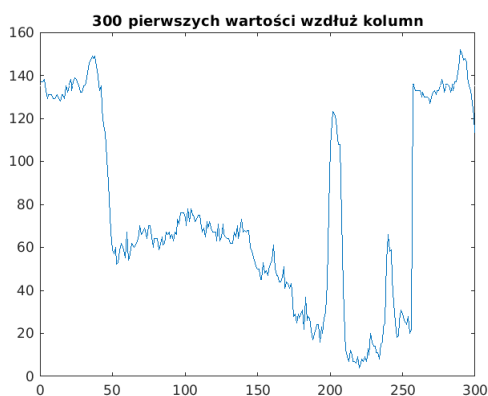
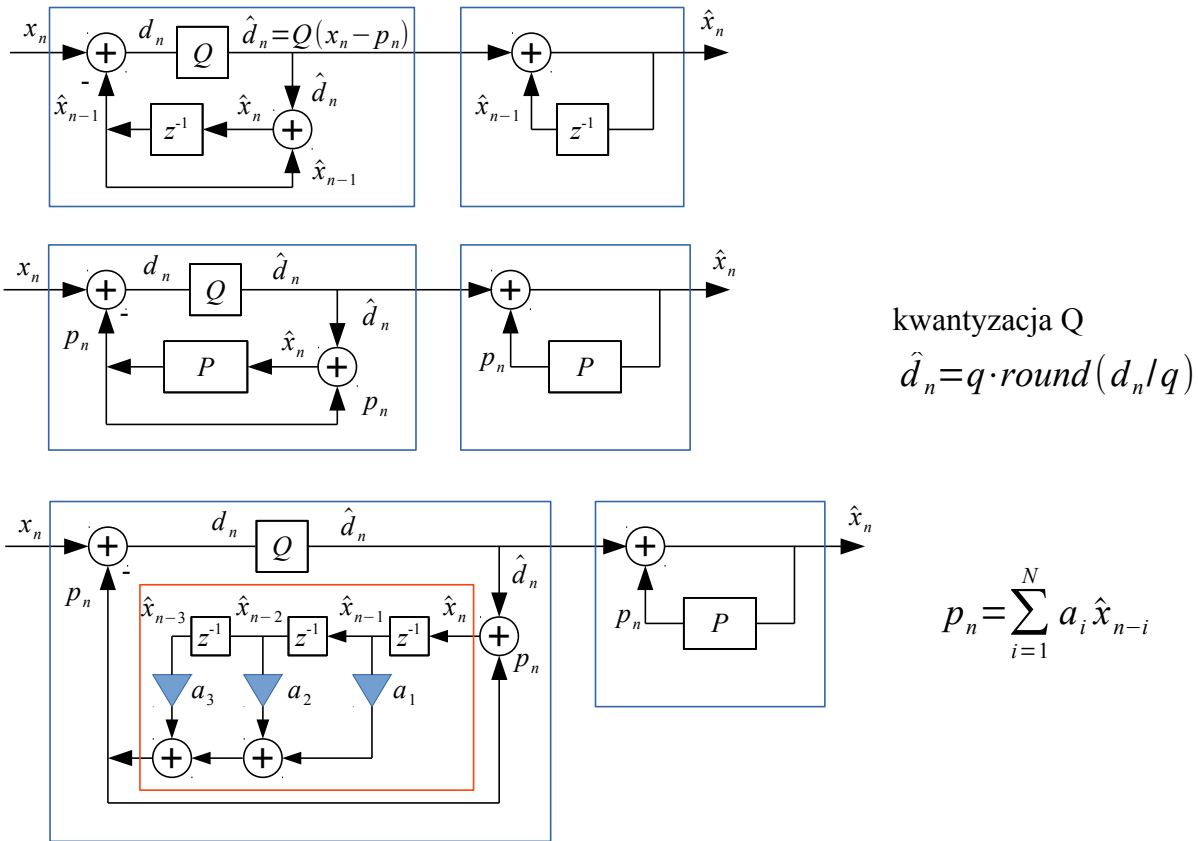


Kodowanie predykcyjne sygnałów DPCM (Differential Pulse Code Modulation)



Schemat blokowy najprostszych wersji algorytmu DPCM.

Schemat blokowy różnych wersji algorytmu DPCM pokazany jest na poniższych rysunkach



Algorytm DPCM bazuje na predykcji bieżącej próbki x_n na podstawie próbek poprzednich

(1) $p_n = \sum_{i=1}^N a_i \hat{x}_{n-i}$, gdzie \hat{x}_n są odtworzonymi wartościami poprzednich próbek.

Błąd predykcji

(2) $d_n = x_n - p_n$

celem zwiększenia kompresji podlega kwantyzacji

(3) $\hat{d}_n = Q(d_n) = Q(x_n - p_n)$.

Sygnału może być odtworzony w odbiorniku (z błędem wskutek kwantyzacji)

(4) $\hat{x}_n = p_n + Q(d_n)$.

Średnio-kwadratowa wartość błędu kodowania DPCM wynosi

(5) $E[\hat{d}_n^2] = E[(x_n - p_n)^2] = E[(x_n - \sum_{i=1}^N a_i \hat{x}_{n-i})^2]$.

Wyznaczamy optymalne wagi predykcji (bez uwzględnienia kwantyzatora)

(6) $\frac{d}{da_k} E[d_n^2] = E[2(x_n - \sum_{i=1}^N a_i x_{n-i})x_{n-k}] = 0$, $k=1, 2, \dots, N$

otrzymujemy

(7) $E[x_n x_{n-k}] = \sum_{i=1}^N a_i E[x_{n-i} x_{n-k}]$, $k=1, 2, \dots, N$. (*)

Oznaczamy

$$R_{xx}(i, k) = E[x_{n-i}x_{n-k}] = R_{xx}(k, i) = R_{xx}(k-i) = R_{xx}(i-k) = R_{xx}(|i-k|)$$

Wtedy możemy przepisać (7) w postaci

$$(8) \quad \begin{bmatrix} R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) \\ \vdots \\ R_{xx}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \cdots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \cdots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

Powyższe równania znane są pod nazwą równań Wienera-Hopf'a albo Yulea-Walker'a.

Zysk z kodowania DPCM definiowany jest wzorem:

$$(9) \quad G_{DPCM} = \frac{E[(x - \bar{x})^2]}{E[d^2]} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_d^2}, \quad \text{gdzie } \bar{x} \text{ jest składową stałą sygnału}$$

Dla algorytmu DPCM z predyktorem o tylko jednym współczynniku a_1 mamy

$$(10) \quad a_1 = R_{xx}(1)/R_{xx}(0) = R_{xx}(1)/\sigma_x^2, \quad // \text{na podstawie (8)}$$

$$(11) \quad d_n = x_n - a_1 x_{n-1} \quad // \text{sygnał wyjściowy DPCM}$$

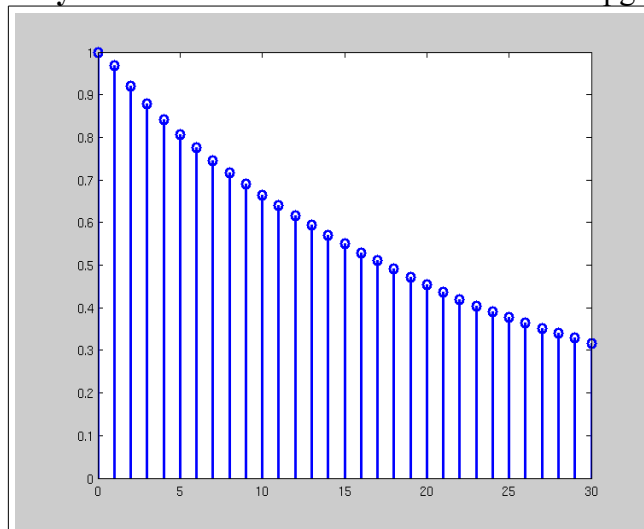
Wariancja sygnału wyjściowego (11)

$$(12) \quad \sigma_d^2 = E[d_n^2] = E[(x_n - a_1 x_{n-1})^2] = \sigma_x^2 + a_1^2 \sigma_x^2 - 2a_1 R_{xx}(1) = \sigma_x^2 - a_1^2 \sigma_x^2$$

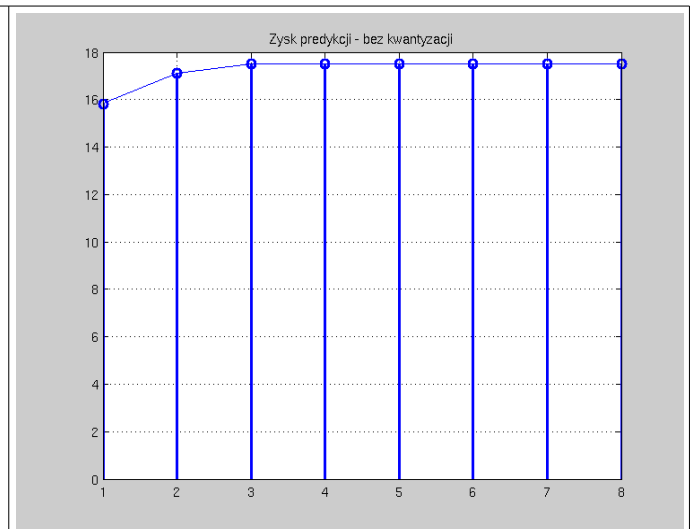
Zysk z kodowania (DPCM z predyktorem o wadze $a_1 = R_{xx}(1)/R_{xx}(0)$):

$$(13) \quad G_{DPCM,1} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 - a_1^2 \sigma_x^2} = \frac{1}{1 - a_1^2}, \quad a_1 = \frac{R_{xx}(1)}{R_{xx}(0)}$$

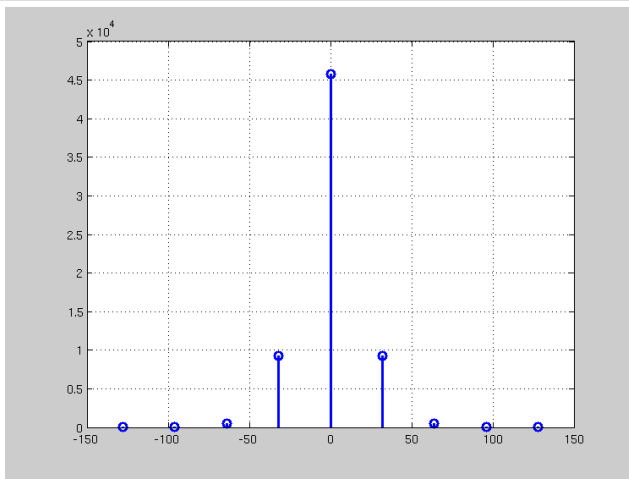
Przykład: kodowanie DPCM obrazu lena256.pgm



Unormowaną funkcję autokorelacji

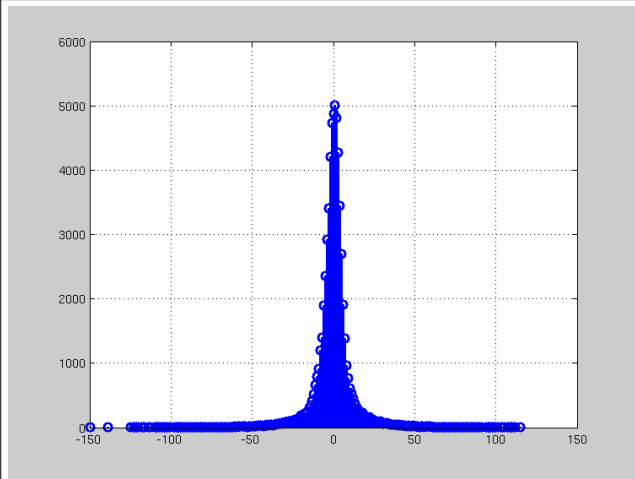


Zysk z kodowania DPCM

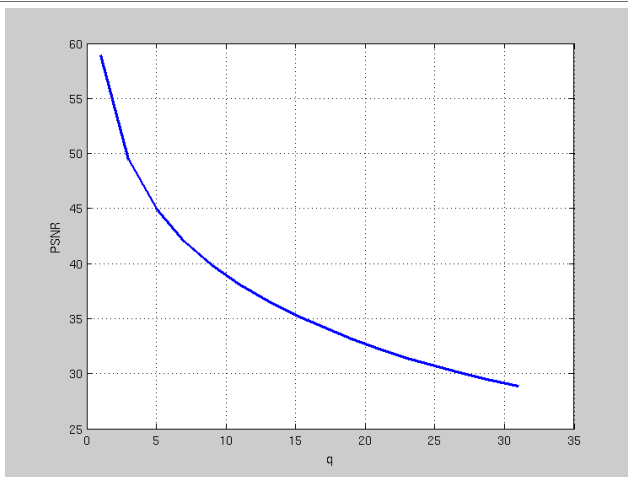


Histogram wartości \hat{d}_n dla kwantyzatora $q=32$

wartość	ilość	częstość (estymata $p(x_i)$)
-186	1	0.0000152
-155	2	0.0000305
-124	23	0.0003509
-93	120	0.0018310
-62	494	0.0075378
-31	8734	0.1332702
0	46743	0.7132415
31	8776	0.1339111
62	530	0.0080871
93	98	0.0014953
124	15	0.0002288



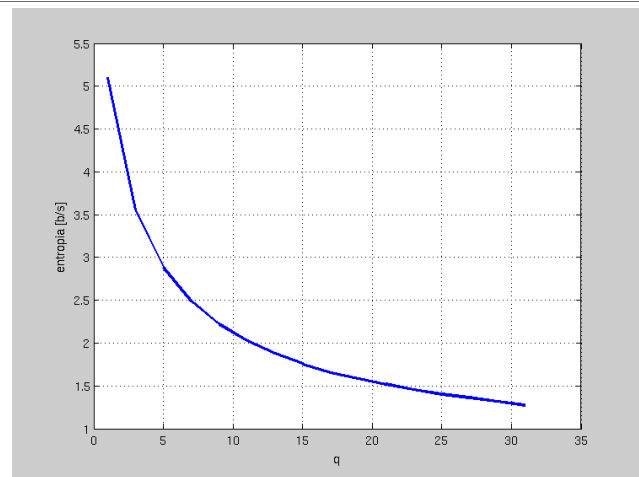
Histogram wartości \hat{d}_n dla kwantyzatora $q=2$



Błąd rekonstrukcji **PSNR** w funkcji stopnia kwantyzacji ($q=1:32$)

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \hat{x}_n)^2$$

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{MSE},$$



Entropia Shannona

$$H(x) = - \sum p(x_i) \log_2 p(x_i),$$

gdzie $\log_2 p(x_i)$ jest liczbą bitów potrzebnych do reprezentacji symbolu x_i

Funkcje korelacji własnej i wzajemnej

Funkcja korelacji wzajemnej dwóch sygnałów deterministycznych $x(t)$ i $y(t)$ o ograniczonej energii

$$(a) \quad R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt, \quad R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Dla sygnałów dyskretnych deterministycznych $x(n)$ i $y(n)$ o ograniczonej energii mamy

$$(b) \quad R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n-k).$$

W praktyce korzysta się z estymatorów funkcji autokorelacji (dla ergodycznego procesu losowego), które wyznaczane są w oparciu o sygnały o skończonej liczbie próbek N

$$(c) \quad R_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} x(n) x^*(n-k), \quad (\text{obciążony})$$

$$(d) \quad R_{xx}(k) = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} x(n) x^*(n-k), \quad (\text{nieobciążony})$$

