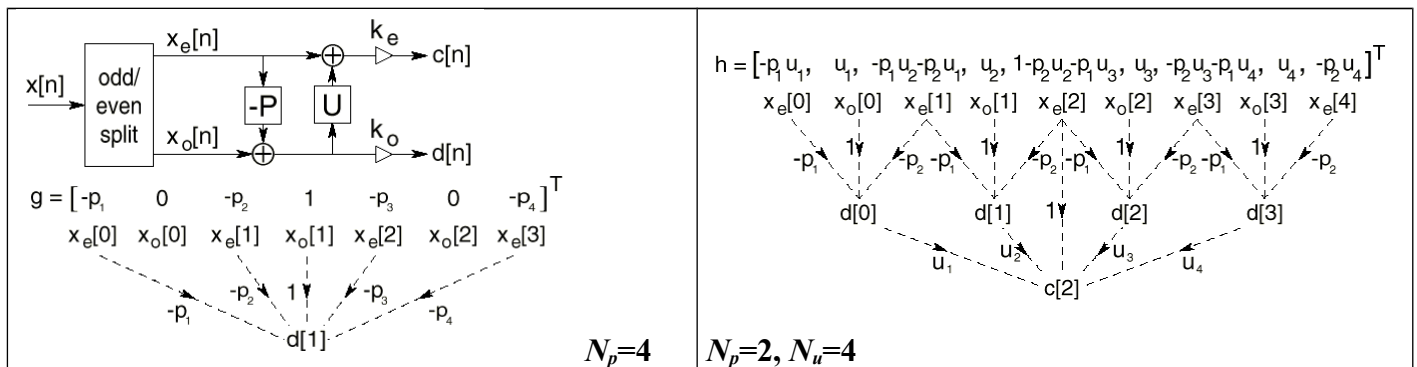
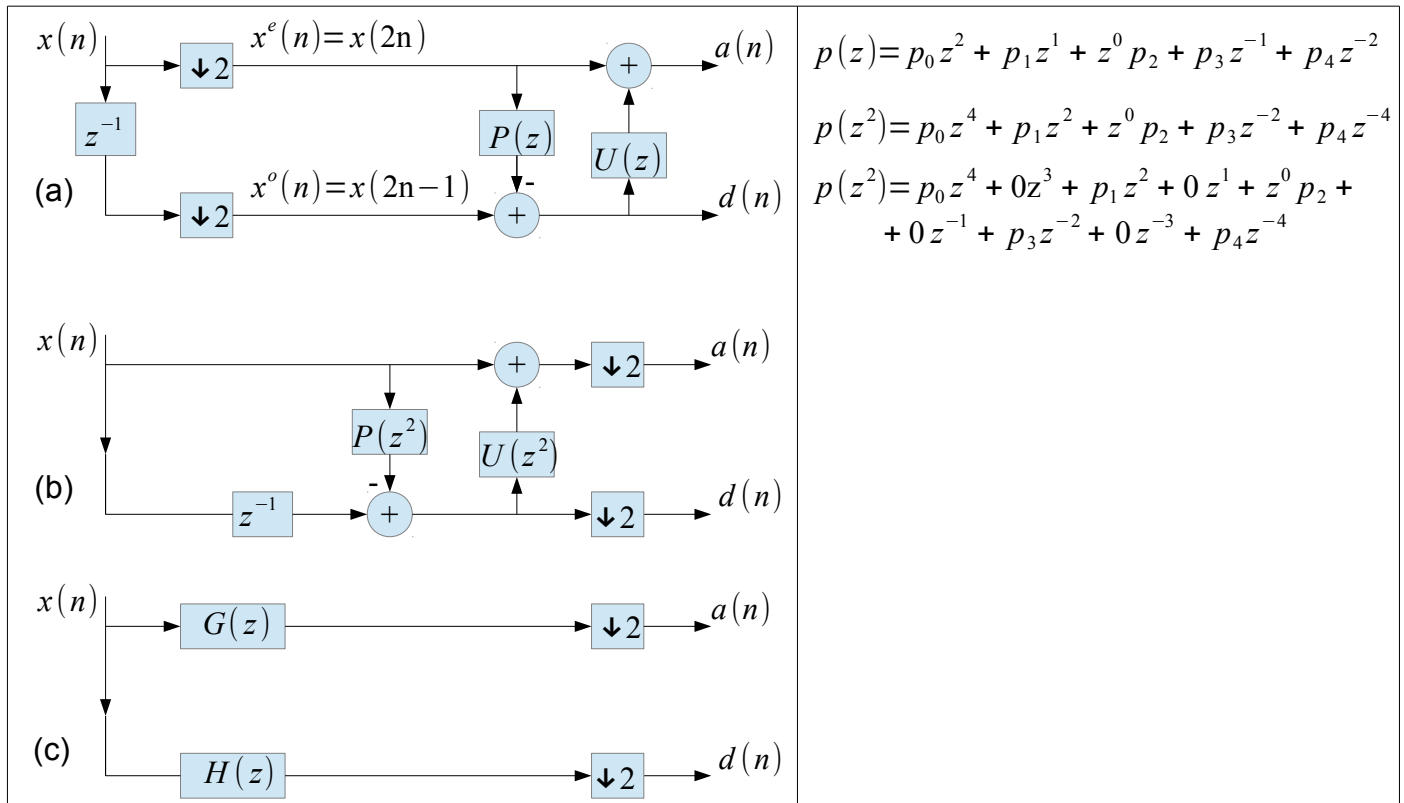


Transformacja falkowa w wersji predykcyjnej



Wyznaczanie wag p_n filtru P (przykład $N_p=4$). Na podstawie schematu blokowego (rys 1: a,b,c) mamy:

$$g = [-p_1 \ 0 \ -p_2 \ 1 \ -p_3 \ 0 \ -p_4]^T$$

filtr g powinien tłumić sygnały będące wielomianami rzędu 0 do 3:

$$Vg=0, \text{ gdzie } V = [v_{m,n}]_{N_p \times 2N_p-1}, \quad v_{m,n} = n^m, \quad m=0,1,\dots,N_p-1, \quad n=-(N_p-1),\dots,(N_p-1)$$

Powyższy warunek ($Vg=0$) oznacza, że iloczyn skalarny sygnału (kolejne wiersze macierzy V) będącego wielomianem z odpowiedzią impulsową filtra (g) jest zerem.

Dla $N_p=4$ warunek ten wygląda tak:

$$\begin{bmatrix} -3^0 & -2^0 & -1^0 & 0^0 & 1^0 & 2^0 & 3^0 \\ -3^1 & -2^1 & -1^1 & 0^1 & 1^1 & 2^1 & 3^1 \\ -3^2 & -2^2 & -1^2 & 0^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ -3^3 & -2^3 & -1^3 & 0^3 & 1^3 & 2^3 & 3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_1 \\ 0 \\ -p_2 \\ 1 \\ -p_3 \\ 0 \\ -p_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} -3^0 & -1^0 & 1 & 1^0 & 3^0 \\ -3^1 & -1^1 & 0 & 1^1 & 3^1 \\ -3^2 & -1^2 & 0 & 1^2 & 3^2 \\ -3^3 & -1^3 & 0 & 1^3 & 3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ 1 \\ -p_3 \\ -p_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3^0 & -1^0 & 1^0 & 3^0 \\ -3^1 & -1^1 & 1^1 & 3^1 \\ -3^2 & -1^2 & 1^2 & 3^2 \\ -3^3 & -1^3 & 1^3 & 3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{P})$$

Warunek na filtr U (przykład dla $N_p=4, N_u=2$), filtr $u=[u_1 \ 0 \ u_2]^T$

Filtry g i u połączone są szeregowo. Ich odpowiedź wypadkowa (filtr f) jest ich splotem:

$$f=[u_1 \ 0 \ u_2]^T * [-p_1 \ 0 \ -p_2 \ 1 \ -p_3 \ 0 \ -p_4]^T$$

$$f=[-p_1 u_1, \ 0, \ -p_2 u_1 - p_1 u_2, \ u_1, \ -p_3 u_1 - p_2 u_2, \ u_2, \ -p_4 u_1 - p_3 u_2, \ 0, \ -p_4 u_2]^T$$

Filtr f jako splot filtrów g i u ma $(2 N_p - 1) + (2 N_u - 1) - 1$ współczynników.

Dolnoprzepustowy filtr $h(n)$ określony jest równaniem $h=f+e$ (rys 1c), gdzie

$$e=[0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 1, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0]^T.$$

Zamiast projektować dolnoprzepustowy (LP) filtr $h(n)$ zaprojektujemy komplementarny do niego filtr HP

$$\tilde{h}(n)=(-1)^n h(n), \quad n=-(N_p+N_u-2), \dots, (N_p+N_u-2)$$

Tak jak poprzednio skorzystamy z warunku:

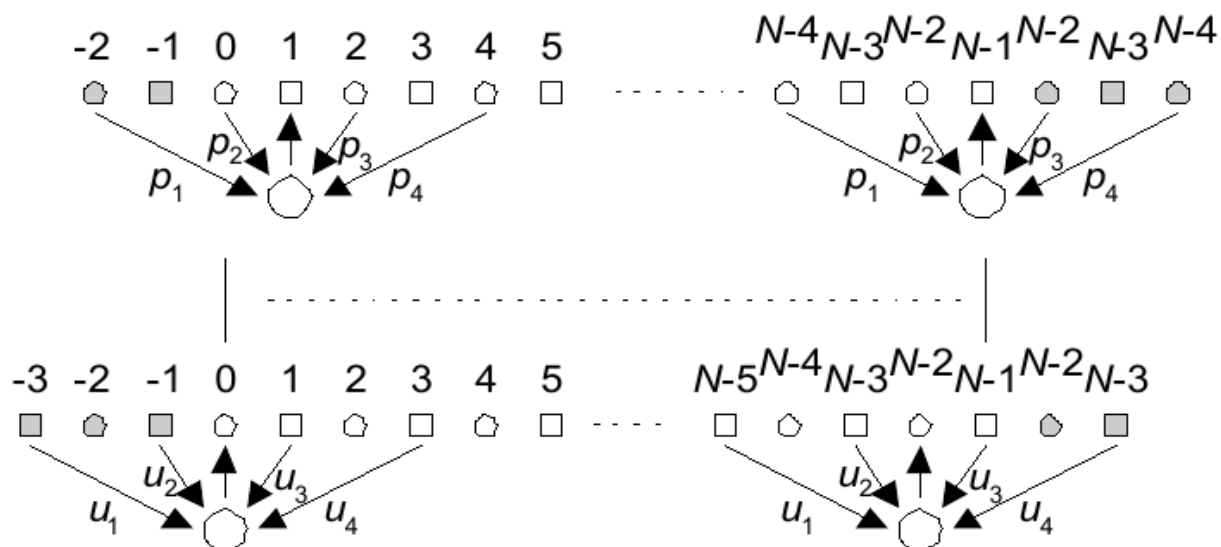
$$V \tilde{h} = \mathbf{0}, \quad V[(-1)^n (f+e)] = \mathbf{0}$$

$$V=[v_{m,n}]_{N_u \times (2 N_p - 1 + 2 N_u - 1 - 1)}, \quad v_{m,n}=n^m, \quad m=0,1,\dots, N_u-1, \quad n=-(N_p+N_u-2), \dots, (N_p+N_u-2)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4^0 & -3^0 & -2^0 & -1^0 & 0^0 & 1^0 & 2^0 & 3^0 & 4^0 \\ -4^1 & -3^1 & -2^1 & -1^1 & 0^1 & 1^1 & 2^1 & 3^1 & 4^1 \end{bmatrix}}_V \Lambda \left(\underbrace{\begin{bmatrix} -p_1 & & & & & & & & \\ 0 & -p_1 & & & & & & & \\ -p_2 & 0 & -p_1 & & & & & & \\ 1 & -p_2 & 0 & & & & & & \\ -p_3 & 1 & -p_2 & & & & & & \\ 0 & -p_3 & 1 & & & & & & \\ -p_4 & 0 & -p_3 & & & & & & \\ & -p_4 & 0 & & & & & & \\ & & -p_4 & & & & & & \end{bmatrix}}_f \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_e \right) = \mathbf{0}$$

$$V \Lambda \underbrace{\begin{bmatrix} -p_1 & & & & & & & & \\ 0 & -p_1 & & & & & & & \\ -p_2 & -p_1 & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & \\ -p_3 & -p_2 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ -p_4 & -p_3 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & & -p_4 & & & & & & \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -V \Lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_e, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -(V \Lambda P)^{-1} V \Lambda e$$

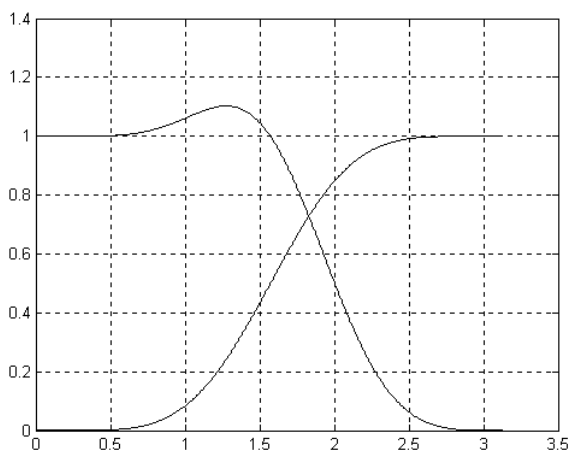
Analiza sygnałów o skończonym nośniku - problem brzegowy

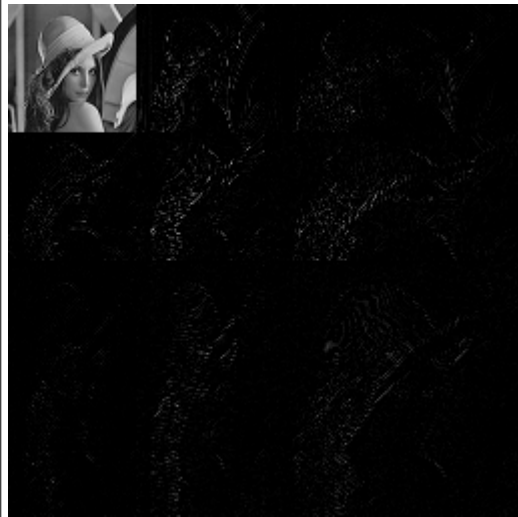
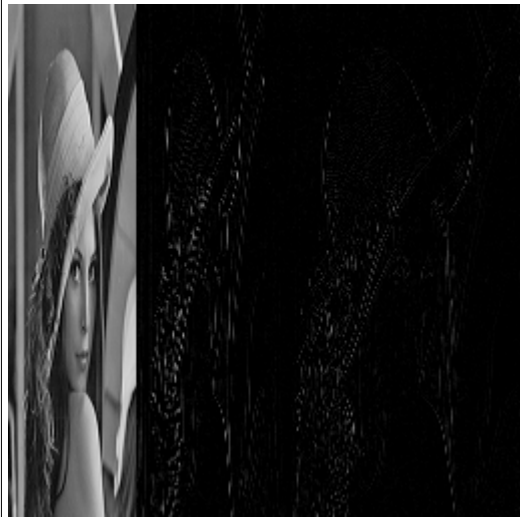


Rozwiązanie – lustrzane rozszerzenie sygnału na brzegach - Implementacja in place

Przykładowe filtry

	P	U
$N_p=2, N_u=4$	0.5000, 0.5000	-0.0469, 0.2969, 0.2969, -0.0469
$N_p=4, N_u=2$	-0.0625, 0.5625, 0.5625, -0.0625	0.2500, 0.2500
$N_p=4, N_u=4$	-0.0625, 0.5625, 0.5625, -0.0625	-0.0313, 0.2813, 0.2813, -0.0313
$N_p=6, N_u=4$	0.0117, -0.0977, 0.5859, 0.5859, -0.0977, 0.0117	-0.0312, 0.2812, 0.2813, -0.0313



**Literatura:**

Claypoole, R. L., Baraniuk, R. G., & Nowak, R. D. (1998, October). Lifting construction of non-linear wavelet transforms. In *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis (Cat. No. 98TH8380)* (pp. 49-52). IEEE.

<https://scholarship.rice.edu/bitstream/handle/1911/19806/Cla1998Oct5LiftingCon.PDF?sequence=1>