

Metody numeryczne w elektrotechnice

Ćwiczenie 1 — Reprezentacja liczb, błędy obliczeń, uwarunkowanie zadań

Dariusz Borkowski

8 października 2013

Wstęp

W ćwiczeniu 1 zapoznacie się reprezentacją liczb zmiennoprzecinkowych w komputerze na przykładzie powszechnie stosowanego standardu **IEEE 754**¹ oraz z ograniczeniami wynikającymi z tego sposobu reprezentacji. Następnie sprawdzicie na czym polega złe uwarunkowanie zadania na przykładzie wyznaczania pierwiastków równania kwadratowego oraz odwracania macierzy.

1 Obliczanie ilości bitów mantysy i wykładnika — 2 pkt

1.1 Wyznaczanie długości mantysy liczby zmiennoprzecinkowej

Napisz w Matlabie program, którego zadaniem będzie wyznaczenie długości mantysy liczby zmiennoprzecinkowej x typu `double` (stosowanego domyślnie w Matlabie). Program powinien również wyznaczać wartość ϵ . Wynikiem ma być wypisana na ekranie ilość bitów d przeznaczona na mantysę m oraz wyznaczona wartość ϵ i dla porównania wartość ϵ dostępna w Matlabie poleceniem `eps`. Oprócz tego należy wyświetlić wartości 1 , $1 + \frac{\epsilon}{2}$, $1 + \epsilon$.

Oczekiwany rezultat można osiągnąć poprzez skonstruowanie ciągu:

$$\epsilon_{d+1} = \frac{\epsilon_d}{2} \quad (1)$$

gdzie $\epsilon_1 = 1$ i przerwanie obliczeń w momencie niespełnienia warunku:

$$1 + \epsilon > 1 \quad (2)$$

definiującego ϵ . Ilość dzielen d odpowiada długości mantysy m .

Aby zauważyć różnice w wyświetlonych wartościach, należy tymczasowo (w tym oraz w dwóch kolejnych zadaniach) zmienić w Matlabie format wyświetlanych liczb ze standardowego `short` na `long e`. Ustawienia te są dostępne w menu `File > Preferences > Command window > Text display > Numeric format`.

1.2 Wyznaczanie długości wykładnika liczby zmiennoprzecinkowej

Rozszerz powyższy program o funkcję która pozwoli na obliczenie ilości bitów wykładnika e liczby x typu `double`.

Zadanie to można wykonać konstruując ciąg postaci:

$$x_{u+1} = 2x_u \quad (3)$$

rozpoczynając od $x_1 = \text{realmin}$ aż do niespełnienia warunku:

$$x_u < \text{realmax}, \quad (4)$$

gdzie `realmin` i `realmax` to polecenia Matlab'a zwracające ekstremalne wartości znormalizowanej liczby `double`.

Używając logarytmu o podstawie 2 (w matlabie funkcja `log2`) sprawdź czy spełniona jest zależność:

$$\epsilon_{max} = 2^u. \quad (5)$$

opisującą związek ilości bitów u wykładnika z ϵ_{max} . Jeśli zależność nie jest spełniona, wyjaśnij dlaczego.

Dodaj do siebie ilość bitów d mantysy oraz ilość bitów u wykładnika. Sprawdź czy wynik jest całkowitą wielokrotnością ośmiu bitów (bajtu). Jeśli nie to wyjaśnij dlaczego (odpowiedź była na wykładzie).

¹Pod adresem <http://babbage.cs.qc.edu/IEEE-754/> znajduje się przyjemny kalkulator przeliczający liczby pomiędzy różnymi reprezentacjami.

3 Uwarunkowanie zadania wyznaczania pierwiastków wielomianu — 2 pkt

Napisz w Matlabie program, wyznaczający pierwiastki wielomianu 2 rzędu:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (6)$$

według znanych (m.in. z pierwszego wykładu) wzorów na pierwiastki równania kwadratowego:

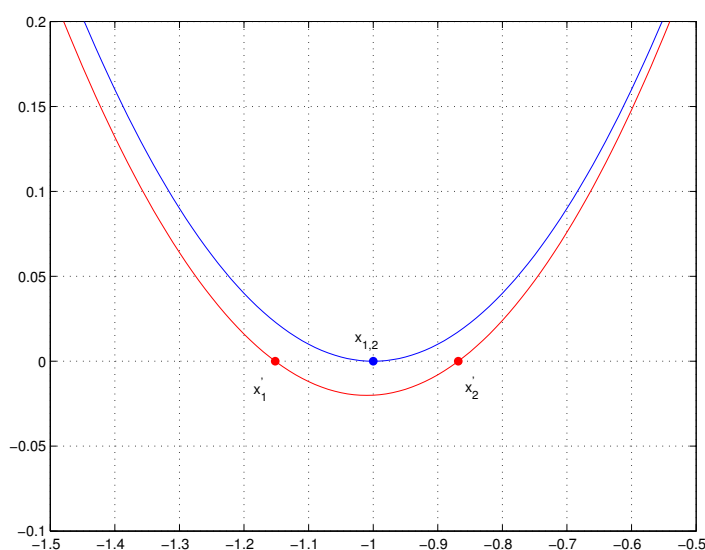
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7)$$

dla przyjętych wartości parametrów $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, dla których równanie (6) ma jeden podwójny pierwiastek $x_{1,2} = -1$.

Przyjmij 1% zaburzenie względne e parametru b , co oznacza, że $b' = b(1 + e)$. Wyznacz i wyświetl wartości pierwiastków x_1 , x_2 przy braku zaburzenia oraz x'_1 , x'_2 przy zaburzonym parametrze b . Przedstaw graficznie efekt zaburzenia w postaci wykresu nałożonych na siebie dwóch wykresów funkcji (6) (z zaburzeniem i bez) jak na rysunku 1. Wyznacz i wypisz na ekranie błędy względne wyznaczania pierwiastków oraz współczynniki uwarunkowania zadania wyznaczania każdego z pierwiastków, określone zależnością:

$$\text{cond}_{x_{1,2}} = \left| \frac{\frac{x_{1,2} - x'_{1,2}}{x_{1,2}}}{\frac{b - b'}{b}} \right|. \quad (8)$$

Sprawdź co się stanie po przyjęciu ujemnego zaburzenia $e = -0,01$. Sprawdź, że zadanie wyznaczania pierwiastków równania (6) dla współczynników $a = 1$, $b = 2$, $c = 0,01$ jest dobrze uwarunkowane. Wyjaśnij dlaczego.



Rysunek 1: Przykład wpływu zaburzenia parametru b na wyznaczanie pierwiastków równania kwadratowego.

4 Uwarunkowanie zadania odwracania macierzy — 1 pkt

Sprawdź wskaźnik uwarunkowania zadania odwracania macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10^{-13}q & 1 & 2 \\ 10^{-13} & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

w zależności od wartości parametru q . Dla $q = 1$ macierz $\mathbf{A}$ jest osobliwa (*ang. singular*), gdyż pierwsze dwa wiersze są liniowo zależne (w tym wypadku jednakowe), wskutek czego wyznacznik jest równy 0. Dla $q \approx 1$ zadanie odwracania macierzy jest źle uwarunkowane.

Zacznij od poznania komunikatów zgłaszanych przez Matlaba w przypadku trudności lub niemożności odwrócenia macierzy A dla $q = 0,5$, $q = 0,97$, $q = 0,99$, $q = 1$. Następnie zapoznaj się z opisami funkcji `rcond` i `cond` (`help nazwa_funkcji`). Do czego służą te funkcje i jakie ich wartości oznaczają złe uwarunkowanie?

Napisz program, który wyznaczy współczynnik uwarunkowania zadania `cond` oraz współczynnik odwrotny `rcond` odwracania macierzy A w funkcji parametru q . Parametr q ma się zmieniać od 0 do 2 z krokiem 0,01. Na dwóch osobnych wykresach wyrysuj wartości wyznaczonych współczynników w funkcji q .

Na następne zajęcia

Proszę zapoznać się deklarowaniem, wypełnianiem i wykorzystaniem w podstawowym stopniu (dodawanie, mnożenie, inwersja) macierzy z wykorzystaniem biblioteki GSL dla języka C oraz oczywiście w Matlabie. Opis tworzenia macierzy i wektorów można znaleźć pod adresem: http://www.gnu.org/software/gsl/manual/html_node/Vectors-and-Matrices.html, a opis podstawowych operacji na macierzach pod adresem: http://www.gnu.org/software/gsl/manual/html_node/BLAS-Support.html. Pod koniec każdej ze stron pokazano proste przykłady.

Oprócz tego proszę sobie przypomnieć metody prądów oczkowych i napięć węzłowych rozwiązywania obwodów, metodę Cramera rozwiązywania układu równań liniowych i zasady tworzenia równań stanu.