

Metody numeryczne w elektrotechnice

Ćwiczenie 4 — Interpolacja wielomianowa i funkcje sklepane

Dariusz Borkowski

Wstęp

Na zajęciach rozwiążecie 3 zadania pokazujące typowe zastosowania interpolacji. Nie są to jedyne możliwe zastosowania. W zadaniach zostały pokazane typowe problemy na jakie można natrafić podczas interpolacji oraz metody ich rozwiązywania. Jedno z zadań jest do wykonania w języku C. Zobaczysz, że niektóre funkcje biblioteki GSL są mniej wrażliwe numerycznie niż funkcje Matlab'a. Za każde zadanie możesz zdobyć po 2 punkty.

1 Wyznaczanie wartości temperatury przez interpolację – 2 pkt

Założmy, że dokonaliśmy pomiarów temperatury za pomocą termoelementu typu T (Cu-CuNi). Otrzymaliśmy dwie wartości siły termoelektrycznej $E_1 = 4273\mu\text{V}$, $E_2 = 806\mu\text{V}$. Jak to się często zdarza w rzeczywistości, wartości te znajdują się „pomiędzy” punktami tabeli znajdującej się w normie PN-81/M-85384.05 opisującej charakterystyki termometryczne termoelementów typu T. Do wyznaczenia wartości temperatur T_1 i T_2 w punktach E_1 i E_2 można zatem wykorzystać interpolację punktów podanych w normie wielomianem postaci

$$T = p(E) = a_N E^N + a_{N-1} E^{N-1} + \dots + a_1 E + a_0 \quad (1)$$

Zadanie interpolacji wielomianem wysokiego stopnia jest najczęściej zadaniem źle uwarunkowanym, co może się objawić w postaci błędów interpolacji (błędów wyznaczania współczynników wielomianu, a dalej także jego wartości). Przy interpolacji węzłów równoodległych wielomianem wysokiego stopnia widoczny staje się efekt Rungego, polegający na oscylacjach wielomianu interpolacyjnego między węzłami przy brzegach przedziału interpolacji. Aby ocenić te zjawiska w realnych przypadkach porównasz efekt interpolacji danych wielomianami różnych stopni.

Twoje zadanie będzie polegało na wyznaczeniu w Matlabie współczynników wielomianów interpolujących wybrane punkty, wyrysowaniu wartości tych wielomianów na jednym wykresie, wyznaczeniu wartości temperatur w punktach E_1 i E_2 przez interpolację danych wejściowych oraz obliczeniu błędów wyznaczania wartości T_1 i T_2 w stosunku do znanych wartości $\approx 100^\circ\text{C}$ i $\approx 20^\circ\text{C}$ odpowiednio.

Wybrane z normy 41 punktów tabeli (wartości siły termoelektrycznej w μV dla zakresu od $12,8^\circ\text{C}$ do 400°C) oraz szkielet programu znajdują się w pliku [lab04z01.m](#). Zmienna skok w kodzie programu odpowiada za wybór punktów, które będą węzłami interpolacji.

Wiadomo, że istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia N , który w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, \dots, y_n$. Z powodu tej jednoznaczności w interpolacji $N+1$ punktów wielomianem stosujemy wielomian stopnia N . Stopień wielomianu jest więc ściśle związany z ilością punktów przez które ma przechodzić (tzw. węzłów interpolacji).

Za wielomian odniesienia $p_0(E)$ przyjmijmy zatem wielomian interpolujący przechodzący przez co piąty, włącznie z pierwszym, punkt z podanych w kodzie programu 41 punktów. Razem daje to 9 węzłów interpolacji i 8-my stopień wielomianu odniesienia. Stopień wielomianu odniesienia jest na tyle niski, że efekt Rungego nie jest widoczny w przyjętej na wykresach skali oraz nie pojawiają się widoczne błędy numeryczne interpolacji.

Współczynniki analizowanego wielomianu $p(E)$ wyższego stopnia wyznacz prowadząc wielomian przez coraz to większą liczbę węzłów, czyli zmniejszając co 1 skok (zmienna skok), z jakim wybierasz węzły interpolacji z punktów w wektorach T_n i E_n . Do wyznaczania współczynników wielomianów wykorzystaj funkcję `polyfit`, a do wyznaczenia wartości wielomianu na podstawie obliczonych współczynników funkcję `polyval`.

Dla każdego analizowanego wielomianu $p(E)$ wyznacz temperatury T_1 i T_2 w punktach E_1 i E_2 oraz błędy ich wyznaczania przyjmując za odniesienie temperatury $\approx 100^\circ\text{C}$ i $\approx 20^\circ\text{C}$ odpowiednio. Porównaj wyniki dla skoków od 4 do 1 wypisując również stopień wielomianu $p(E)$. Wartość skoku równa 1 oznacza,

że do interpolacji wybrano wszystkie 41 węzłów, a wielomian $p(x)$ ma stopień 40. Przy tak wysokim stopniu wielomianu zaobserwujesz oprócz efektu Rungego także skutki błędów numerycznych wyznaczania współczynników wielomianu, który obajawi się tym, że wielomian nie przechodzi przez niektóre z węzłów interpolacji¹.

Porównaj wartości pierwszego i ostatniego współczynnika tego wielomianu. Wyrysuj na jednym wykresie wielomiany $p_0(E)$ i $p(E)$, węzły interpolacji obu wielomianów, wyznaczone wartości T_1 i T_2 oraz legendę ze stopniem wielomianów. Przykład pokazano na rysunku 1.

Błędy wyznaczania współczynników wielomianu interpolującego można znacznie ograniczyć poprzez normalizację poziomego położenia węzłów (centrowanie i skalowanie) zgodnie z przekształceniem:

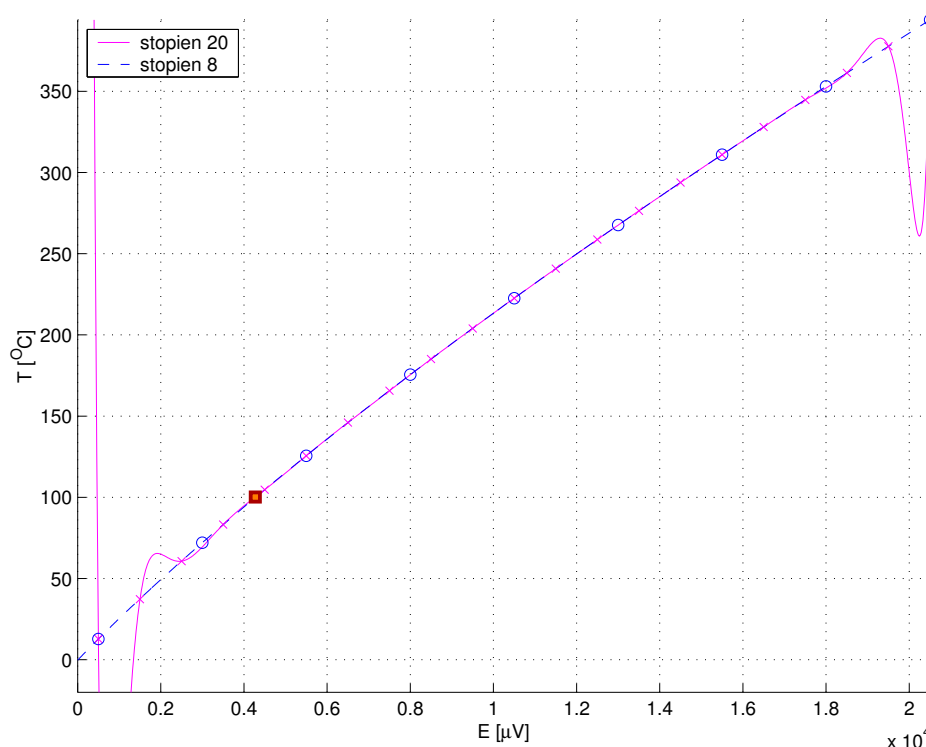
$$E' = \frac{E - \mu_E}{\sigma_E}, \quad (2)$$

gdzie μ_E jest średnią wartością położenia węzłów, a σ_E jest odchyleniem standardowym (rozrzutem) położenia węzłów.

Przekształcenie (2) modyfikuje położenie węzłów (w poziomie czyli na osi 0X) w sposób optymalny, w sensie uwarunkowania macierzy Vandermonde'a interpolacji. Po zastosowaniu przekształcenia (2) wymagane przeprowadzenie analogicznego przekształcenia podczas obliczania wartości wielomianu interpolującego.

Zastosuj w programie opisane przekształcenie węzłów (według wzoru lub z pomocą odpowiednich opcji poleceń `polyfit` i `polyval`) dla wielomianu interpolującego wszystkie punkty i zobacz wynik interpolacji na wykresie. Czy dalej występują błędy numeryczne? Czy występuje efekt Rungego?

Sprawdź czy jest możliwa interpolacja $N + 1$ punktów wielomianem $p(E)$ stopnia mniejszego niż N ? Sprawdź to wykonując stosując funkcję `polyfit` na 9-ciu węzłach odniesienia i podając stopień wielomianu równy 2, zobacz w powiększeniu czy wykres przechodzi przez zadane punkty? Wyjaśnij uzyskane wyniki na podstawie opisu funkcji `polyfit`.



Rysunek 1: Przykład interpolacji charakterystyki termoelementu wielomianami różnych stopni.

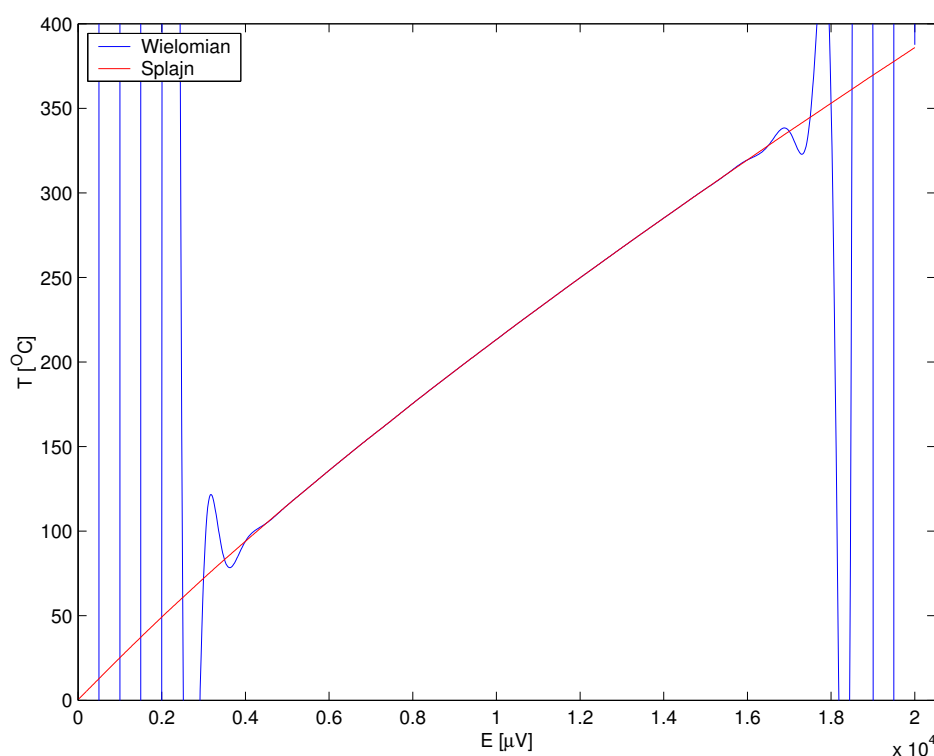
2 Interpolacja wielomianowa i splajnowa w C – 3 pkt

Teraz wykonasz interpolację tych samych 41 węzłów w języku C. Przy interpolacji wielomianowej wielomianem stopnia 40 znowu ujawni się nieporządany efekt Rungego (choć bez tak wielkich błędów jak

¹Błędy wyznaczania współczynników wielomianu wynikają ze złego uwarunkowania macierzy Vandermonde'a.

w Matlabie w poprzednim zadaniu). Jednym ze sposobów uniknięcia efektu Rungego jest interpolacja funkcjami sklejanymi (najlepiej stopnia trzeciego). Dlatego wykonasz również interpolację funkcjami sklejanymi stopnia trzeciego (zamiennie używa się również nazw sklejki kubiczne lub splajny od *cubic spline*). Wykonanie tego zadania w języku C z wykorzystaniem bibliotek GSL nie jest wcale trudne.

Otwórz w środowisku CodeBlocks szkielet programu znajdujący się w pliku [1ab04z02.c](#). Uzupełnij brakujące części zgodnie z poleceniami podanymi w komentarzach. Wynikiem poprawnie działającego programu ma być plik tekstowy `out.dat` zawierający trzy kolumny liczb w notacji naukowej oddzielone tabulatorami² (1000 wierszy). W kolumnach od lewej do prawej mają się znajdować: wartości siły termoelektrycznej E , wartości wielomianu interpolującego zadane punkty, wartości splajnu interpolującego zadane punkty. Musisz znaleźć ten plik na dysku, gdyż w różnych środowiskach plik ten może trafić do różnych katalogów (w UNIXie jest tworzony w katalogu domowym użytkownika). Plik ten należy załadować do Matlab'a i wyrysować na jednym wykresie wynik obu rodzajów interpolacji. Wynik powinien być podobny to przedstawionego na rysunku 2.



Rysunek 2: Przykład interpolacji charakterystyki termoelementu wielomianem 40 stopnia i funkcją sklejaną.

Poniżej opisałem niezbędne³ funkcje potrzebne do zmodyfikowania programu w C.

`gsl_interp * gsl_interp_alloc (const gsl_interp_type * T, size_t size)` zwraca wskaźnik do obiektu typu `gsl_interp`, który służy do przechowywania funkcji interpolującej przechodzącej przez `size` węzłów. Możemy wybrać różne rodzaje funkcji interpolujących, między innymi wielomian `gsl_interp_polynomial` lub funkcję sklejaną `gsl_interp_cspline`. Przykład: `wielomian = gsl_interp_alloc(gsl_interp_polynomial, 11)`.

`int gsl_interp_init (gsl_interp * interp, const double xa[], const double ya[], size_t size)` dokonuje inicjalizacji obiektu `interp` typu `gsl_interp` dla węzłów z tablicy `xa[]` o wartościach z tablicy `ya[]` o długości `size`. Węzły w tablicy `xa[]` muszą być uporządkowane w kolejności rosnącej. Przykład: `gsl_interp_init(wielomian, En, Tn, 11)`.

`gsl_interp_accel * gsl_interp_accel_alloc (void)` zwraca wskaźnik do obiektu typu `gsl_interp_accel`, który jest niezbędny przy wywołaniu funkcji obliczającej wartości funkcji

²Przypominam, że liczbę w C format naukowy uzyskujemy wpisując `%g`, znak tabulacji `\t`, a znak nowej linii `\n`.

³Opis wszystkich funkcji GSL związanych z interpolacją jest dostępny pod adresem http://www.gnu.org/software/gsl/manual/gsl-ref_26.html#SEC389

interpolującej. Obiekt ten jest wykorzystywany do przyspieszenia obliczeń, przy czym zasada jego działania jest podana dosyć w dokumentacji lakonicznie: *The state of searches can be stored in a gsl_interp_accel object, which is a kind of iterator for interpolation lookups. It caches the previous value of an index lookup. When the subsequent interpolation point falls in the same interval its index value can be returned immediately ... This function returns a pointer to an accelerator object, which is a kind of iterator for interpolation lookups. It tracks the state of lookups, thus allowing for application of various acceleration strategies.* Przeglądanie pliku nagłówkowego `gsl_interp.h` nieco wyjaśnia, ale dalej pozostaje niedosyt.

`double gsl_interp_eval (const gsl_interp * interp, const double xa[], const double ya[], double x, gsl_interp_accel * acc)` zwraca obliczoną wartość funkcji interpolującej `interp` w punkcie `x` przechodzącej przez węzły określone tablicami `xa[]` i `ya[]`, z użyciem przyspieszacza `acc`. Przykład: `y = gsl_interp_eval(wielomian, En, Tn, x, acc)`.

`void gsl_interp_free (gsl_interp * interp)` zwalnia pamięć po obiekcie zawierającym funkcję interpolującą typu `gsl_interp`.

`void gsl_interp_accel_free (gsl_interp_accel * acc)` zwalnia pamięć po przyspieszaczu typu `gsl_interp_accel`.

3 Interpolacja funkcjami sklejanymi w Matlabie – 3 pkt

Dysponujemy histogramem określającym natężenie ruchu pojazdów w ciągu doby w pewnym punkcie. Histogram składa się z 12 przedziałów, w których podane są ilości samochodów przejeżdżające przez punkt pomiaru w dwugodzinnych okresach, t.j. np. ilość samochodów które przejechały między 6:00 a 8:00. Rejestracji dokonano w dzień powszedni. Punkty środkowe przedziałów, będące zarazem węzłami interpolacji, przypadają na nieparzyste godziny np. 7:00. Twoim zadaniem będzie określenie przewidywanej liczby pojazdów w przedziale między godziną 7:30 a 8:00, w celu odpowiedniego doboru czasu cyklu świateł na przejściu dla pieszych, przez które dzieci przechodzą do pobliskiej szkoły. Drugim zadaniem będzie wyznaczenie optymalnej pory remontu nawierzchni ze względu na najmniejsze spodziewane natężenie ruchu.

Przedziały zliczania są dość szerokie z powodu stosunkowo niedużego natężenia ruchu w punkcie pomiarowym, dlatego wyznaczanie liczności pojazdów w krótszych przedziałach czasu można wykonać obliczając wartości krzywej dopasowanej do histogramu, w tym przypadku⁴ będzie to funkcja interpolująca.

W zadaniu porównasz interpolację za pomocą wielomianu oraz za pomocą funkcji sklepanych trzeciego stopnia o rozmaitych warunkach brzegowych. Warunki dotyczą wartości pierwszej i drugiej pochodnej funkcji interpolującej na końcach przedziału interpolacji. Możliwe jest nałożenie np. takich warunków, które spowodują, że funkcja interpolująca będzie okresowa (oczywiście przy równych wartościach w skrajnych węzłach przedziału interpolacji). Zastanów się jakie to powinny być warunki.

Otwórz plik `lab04z03.m`. Są w nim zdefiniowane wektory `godz` oraz `licz` zawierające odpowiednio środkowe punkty przedziałów czasowych histogramu i liczności pojazdów w przedziałach. Zmienna `godz_i` zawiera punkty czasowe (z rozdzielczością 1 minuta), w których wyznaczane zostaną wartości funkcji interpolujących.

Wyznacz wartości następujących funkcji interpolujących w punktach określonych przez `godz_i`: wielomianu $w_1(t)$ (funkcje `polyfit` i `polyval` jak w pierwszym zadaniu), splajnu $s_1(t)$ trzeciego stopnia (funkcja `interp1` z odpowiednią opcją). Wyrysuj histogram za pomocą funkcji `bar` a na wykres słupkowy nałóż wartości funkcji interpolujących. Zauważ, że skrajne punkty przedziału interpolacji odpowiadają godzinom 1:00 i 23:00 przez pozostaje 2-godzinny przedział (od 23:00 do 1:00), w którym nie możesz dokonać interpolacji, a jedynie ekstrapolacji. Ekstrapolacja może prowadzić znacznych błędów, dlatego lepiej jej unikać, za wyjątkiem sytuacji, gdy nie ma innego wyjścia. Aby uniknąć ekstrapolacji przyjmij, że dane są okresowe (tzn. powtarzają się co dobę), gdyż problem dotyczy dni powszednich (w weekendy jeździ mniej samochodów, dzieci nie chodzą do szkoły, a ekipy remontowe nie pracują).

Okresowość danych wejściowych zapewnij dopisując na koniec wektora `licz` wartość jego pierwszego elementu, a na koniec wektora `godz` godzinę 25 (czyli pierwszą w nocy następnej doby). Ponownie wyrysuj histogram i wyznaczone na nowo $w_1(t)$ i $s_1(t)$. Zauważ, że wartości wielomianu interpolującego na krańcach przedziału interpolacji są całkowicie nierealne (np. ujemne) z powodu efektu Rungego.

⁴Gdyby przy tak samo małym natężeniu ruchu zliczać pojazdy w krótszych (np. 10 minutowych) przedziałach to estymatory liczności w każdym przedziale miałyby większą wariancję co oznacza, że słupków histogramu byłoby więcej, ale ich wysokość cechowałby większy (losowy) rozrzut. Wtedy zamiast interpolacji lepiej stosować aproksymację.

Natomiast wartości splajnu pomiędzy godziną 1 a 3 na pierwszy rzut oka nie odpowiadają rzeczywistej ilości pojazdów w tym okresie. Ponadto nachylenie splajnu w krańcowych punktach jest różne (różne wartości pochodnej splajnu w skrajnych punktach), co w przypadku okresowych danych intuicyjnie można ocenić jako niewłaściwe.

Nałożenie na splajna dodatkowych warunków równości pierwszej pochodnej splajna w skrajnych punktach przedziału interpolacji oraz równości drugiej pochodnej splajna w tych punktach daje w wyniku splajn „okresowy” (wartości splajna na krańcach oczywiście także są sobie równe). Wyznacz współczynniki splajna „okresowego” używając funkcji `csape` z opcją `'periodic'`. Następnie oblicz i dodaj do wykresu wartości „okresowego” splajna s_2 w punktach `godz_i`. W tym celu wykorzystaj funkcję `fval` i obliczone wcześniej współczynniki. Obie funkcje należą do Spline Toolbox pakietu Matlab.

Jeśli nie masz dostępu do Spline Toolbox pakietu Matlab możliwe jest uzyskanie efektu zbliżonego do splajna „okresowego” za pomocą standardowej matlabowskiej funkcji `spline`. W funkcji tej można zadać wartości pierwszej pochodnej (nachylenia) splajna na krańcach przedziału interpolacji. Jeśli nachylenia na krańcach będą jednakowe, wtedy splajn może być okresowy, o ile wartości jego drugich pochodnych na krańcach będą sobie równe. Na wartości drugich pochodnych w funkcji `spline` nie mamy wpływu, a w jej dokumentacji nie podano według jakiej zasady są one dobierane⁵.

Wygeneruj splajn $s_3(t)$ przypominający splajn okresowy $s_2(t)$. Wartości pierwszej pochodnej (nachylenia) na krańcach zadaj dopisując ja na początek i na koniec wektora wartości funkcji interpolowanej (w tym wypadku `licz`). Wartości zadanych pochodnych powinny być równe nachyleniu stycznej do funkcji interpolowanej w skrajnych punktach. Przybliżeniem pochodnej może być iloraz różnicowy czyli $\frac{\Delta \text{godz}}{\Delta \text{licz}}$. W zależności od rodzaju przyjętego przybliżenia pochodnej (iloraz różnicowy wprzód czyli nachylenie prostej przechodzącej przez węzły aktualny i następny; iloraz różnicowy wstecz czyli nachylenie prostej przechodzącej przez węzły poprzedni i aktualny; iloraz różnicowy centralny czyli nachylenie prostej przechodzącej przez węzły poprzedni i następny, patrz wykład 6) otrzymasz różne wyniki.

Wyrysuj na poprzednim wykresie również splajny: $s_2(t)$ i $s_3(t)$. Spróbuj tak wybrać metodę przybliżenia wartości pochodnej, żeby wykres funkcji otrzymanej poleceniem `spline` nałożył się możliwie dokładnie na wyniki otrzymane funkcjami `csape` i `fval`. Wyjaśnij jak to osiągnąć.

Porównaj zachowanie obu splajnów przy krańcach przedziału interpolacji i pomiędzy godzinami 1 a 3. Ogranicz obszar rysowanego wykresu do wartości z wektora `godz_i` w poziomie i od -5 do 215 w pionie za pomocą funkcji `axis`. Wynik powinien być zbliżony do przedstawionego na rysunku 3.

Oblicz przewidywaną ilość pojazdów przejeżdżających przez punkt pomiaru pomiędzy godziną 7:30 a 8:00. W tym celu wybierz funkcję interpolującą $s(t)$, która według Ciebie najlepiej przybliży dane pomiarowe, a następnie oblicz całkę oznaczoną z tej funkcji w przedziale czasu 7:30 do 8:00. Przybliżeniem całki będzie iloczyn sumy wartości funkcji interpolującej $s(t_k)$ w analizowanym przedziale t_0 do t_K i długości stałego kroku całkowania Δt (odległości pomiędzy kolejnymi punktami wektora `godz_i`). Jest to inaczej całkowanie metodą prostokątów:

$$S = \Delta t \sum_{k=0}^{K-1} s(t_k) \quad (3)$$

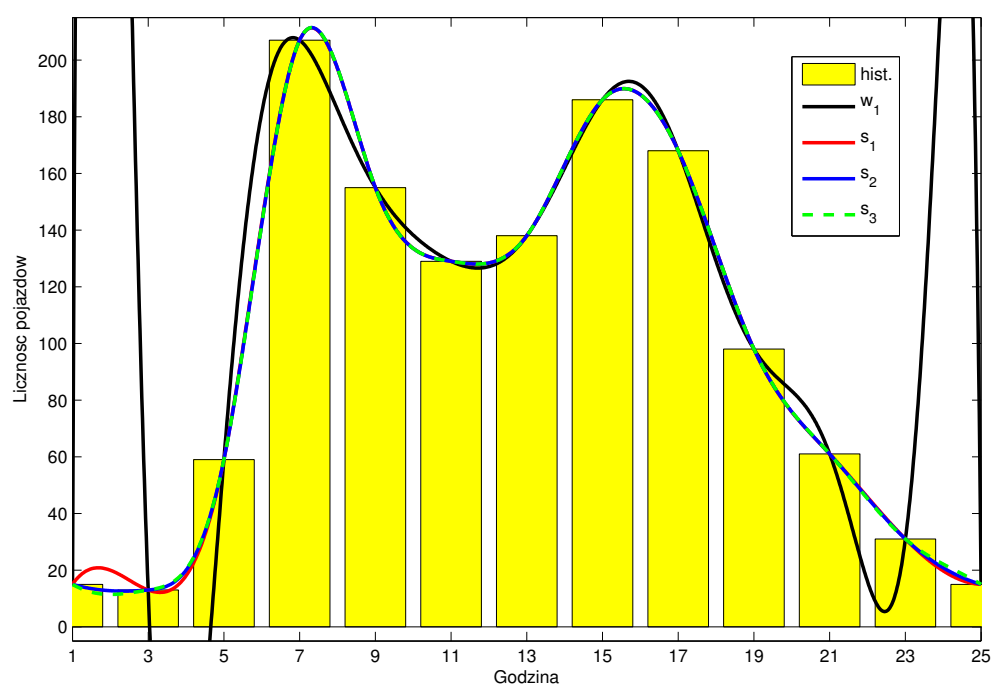
Zastanów się czy tak otrzymany wynik jest realny. Jeżeli nie, to rozważ czy wyników nie należy normalizować szerokością analizowanych przedziałów czasu $t_{K-1} - t_0$.

Określ porę, w której wykonanie prac remontowych będzie najmniej uciążliwe dla kierujących, ze względu na ich ilość. Zwróć uwagę, że wynik dla splajnu „okresowego” s_2 będzie inny niż dla splajnu „zwykłego” s_1 , którego kształt sugeruje chwilowe zwiększenie natężenia ruchu w godzinach od 1 do 3, a najmniejsze natężenie w godzinach między 3 a 4, kiedy robotnicy Zarządu Dróg Powiatowych są najbardziej śpiący.

Na następne zajęcia

Numeryczne metody przybliżonego wyznaczania całek oznaczonych i nieoznaczonych funkcji (kwadratury zwykłe i złożone Newtona-Cotesa i Gaussa, metoda prostokątów, trapezów, itd.).

⁵można to sprawdzić eksperymentalnie różniczkując numerycznie funkcję interpolującą przy krańcach



Rysunek 3: Histogram ilości pojazdów przejeżdżających przez punkt pomiarowy w okresach dwugodzinnych oraz jego interpolacja wielomianem i funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia z nałożonymi warunkami okresowości i bez.