Metody numeryczne w elektrotechnice

Ćwiczenie 12 — Rozwiązywanie zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych

Dariusz Borkowski

6 czerwca 2012

Wstęp

W tych ćwiczeniach poznasz metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych dla zadanych warunków brzegowych. Zadania wykorzystują pdetool czyli Matlabowski frontend do PDE Toolboxa. Służy on do rozwiązywanie problemów dwuwymiarowych metodą elementów skończonych. Oprócz tego dowiesz się jak na podstawie przygotowanego w pdetool opisu problemu wykorzystać komende PDE Toolboxa do rozwiązania, wizualizacji i zapisania wyników.

W opisie równań różniczkowych cząstkowych często występuje operator Hamiltona ∇ (nabla), który jest wektorem symbolicznym używanym do definiowania symboli $\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$ (gradient, dywergencja, rotacja) operujących na polach skalarnych u lub wektorowych $\boldsymbol{v}$. Pole skalarne jest funkcją odwzorowującą N–wymiarową przestrzeń liczb rzeczywistych w 1–wymiarową przestrzeń liczb rzeczywistych $F : \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbb{R}$ lub zespolonych $F : \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbb{C}$. Pole wektorowe jest funkcją, która każdemu punktowi przestrzeni przyporządkowuje pewną wielkość wektorową $F : \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbb{R}^N$.

Rozpatrując dla uproszczenia dwuwymiarowy kartezjański układ współrzędnych ($N = 2$), pole skalarne $u(x, y)$, nazywane również polem potencjalnym, to zbiór wartości skalarnych rozłożonych w przestrzeni (tutaj przestrzeń ma 2 wymiary czyli jest to płaszczyzna). Pole takie może być definiowane np. za pomocą funkcji dwóch zmiennych np. $u = \sin(x) + \cos(y)$. Przykładem pola skalarnego jest rozkład temperatur w przestrzeni lub rozkład potencjału pola elektrycznego.

Pole wektorowe $\boldsymbol{v}(x, y) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_x(x, y) & \boldsymbol{v}_y(x, y)\end{bmatrix}$ to zbiór wektorów w pewnej przestrzeni (tutaj każdemu punktowi płaszczyzny przypisany jest pewien dwuelementowy wektor). Pole takie mogą definiować np. dwie funkcje funkcje skalarne dwóch zmiennych np: $\boldsymbol{v}(x, y) = \begin{bmatrix}x^2 + y^2 & x - 2y\end{bmatrix}$. Przykładem pola wektorowego jest rozkład natężenia pola elektrycznego lub indukcji magnetycznej.

W dwuwymiarowym układzie współrzędnych operator ∇ jest definiowany jako:

$$\nabla \equiv \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_{\boldsymbol{y}} \frac{\partial}{\partial y} \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{1}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{1}_{\boldsymbol{y}}$ są wektorami bazowymi przestrzeni czyli wersorami osi OX i OY układu współrzędnych prostokątnych.

Symbol ∇u dla pola skalarnego $u(x, y)$ jest nazywany gradientem tego pola i jest po prostu wektorem pochodnych cząstkowych pola:

$$\nabla u = \mathrm{grad}\ u = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{x}} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{1}_{\boldsymbol{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

Symbol $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ czyli iloczyn skalarny pola wektorowego $\boldsymbol{v}(x, y)$ z operatorem ∇ nazywany jest dywergencją pola wektorowego i ma wymiar skalarny:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_y}{\partial y} \tag{3}$$

Symbol $\nabla \times \boldsymbol{v}$ czyli iloczyn wektorowy pola wektorowego $\boldsymbol{v}(x, y)$ z operatorem ∇ nazywany jest rotacją i ma wymiar wektora ortogonalnego (prostopadłego) do wersorów $\mathbf{1}_{\boldsymbol{x}}$, $\mathbf{1}_{\boldsymbol{y}}$ jak poniżej:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{z}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{v}_x}{\partial y} \right) \tag{4}$$

Operator ∇ można zastosować dwukrotnie otrzymjąc różnego rodzaju drugie pochodne, z których tylko część ma znaczenie praktyczne.

Najważniejszy operator drugiego stopnia to operator Laplace'a (laplasjan) $\nabla \cdot \nabla u$, oznaczany często symbolem $\nabla^2 u$ lub Δu. Zastosowany do pola skalarnego $u(x, y)$ jest sumą drugich pochodnych tego pola po kierunkach układu współrzędnych:

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5}$$

1 Chłodzenie układów elektronicznych — 1 pkt

Aby poznać zasady pracy z pdetool na początek zajmiesz się najprostszym przykładem statycznego rozkładu temperatur w cienkim radiatorze chłodzącym dwa tranzystory. Zakładamy, że dwa tranzystory są przymocowane do cienkiego, metalowego radiatora, który służy do odprowadzenia z nich ciepła. Ciepło radiatora oddawane jest do otoczenia przez konwekcję (unoszenie) na całej powierzchni radiatora oraz na jego brzegach, przy czym brzeg dolny jest zamocowany do powierzchni płytki drukowanej co utrudnia wymianę ciepła przez ten brzeg. Wielkość konwekcji jest uzależniona od różnicy temperatur radiatora i otoczenia. Temperatura otoczenia jest stała. Układ znajduje się w stanie ustalonym, oba elementy elektroniczne oddają stałą ilość ciepła w jednostce czasu (moc [J/s = W]).

Poszukiwany skalarny rozkład $u(x, y)$ w układzie 2D zawierającym źródło opisuje eliptyczne (niezależne od czasu) równanie Poissona o ogólnej postaci

$$\nabla^2 u = f(x, y) \tag{6}$$

W przypadku rozkładu temperatur $T(x, y)$ równanie to można zapisać

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = Q + h(T_{ext} - T) \tag{7}$$

gdzie k jest współczynnikiem przewodzenia ciepła w materiale, Q jest ciepłem oddawanym przez źródło w jednostce czasu, h jest współczynnikiem konwekcji czyli unoszenia ciepła przez powierzchnię do innego ośrodka, a T_{ext} jest temperaturą otoczenia. Innymi słowy lewa strona równania opisuje rozkład temperatury, a prawa źródło ciepła oraz wymianę ciepła z otoczeniem.

Uruchom pdetool wpisując polecenie `pdetool` w Matlabie. Przebieg pracy jest zgodny z kolejnością menu począwszy od lewej (menu `Options`) do prawej czyli: określenie rodzaju problemu, określenie geometrii problemu, zdefiniowanie warunków brzegowych, podanie równań opisujących problem, generowanie siatki trójkątów, określenie dodatkowych parametrów solvera, wizualizacja wyników.

Określ rodzaj problemu `Options > Application > Heat Transfer` związany z wymianą ciepła.

Rozwiązanie zadania rozpocznij od narysowania radiatora oraz dwóch przymocowanych do niego tranzystorów. Za pomocą `Options > Axes Limits...` ustaw rozmiar układu współrzędnych na –2 do 2 w poziomie i 0 do 3 w pionie. Włącz również `Options > Grid` i `Options > Snap`. Wybierz narzędzie `Draw > Rectangle/Square` i narysuj prostokąt R1, a następnie dwa kwadraty SQ1 i SQ2 o wymiarach jak na rysunku 1. Zauważ, że w oknie pdetool powyżej rysunku domyślnie przyjmowana jest suma elementów `R1+SQ1+SQ2`, choć możliwy jest też iloczyn (część wspólna) i różnica elementów. Zapisz rozpoczęty projekt.

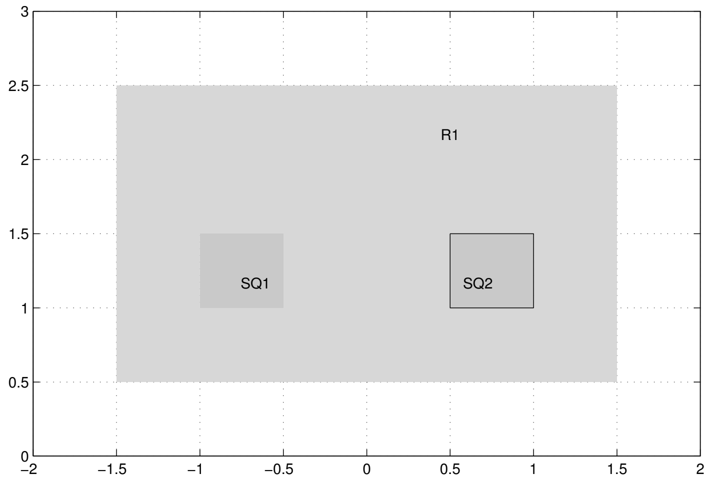
Jako, że poszukujemy rozwiązania $T(x, y)$ wewnątrz ograniczonego obszaru, określimy warunki brzegowe problemu. Jako brzegi obszaru traktujemy jedynie krawędzie prostokąta R1. Nie da się określić warunków brzegowych dla elementów wewnątrz obszaru R1. Aby zapisać, że ciepło odprowadzane jest przez konwekcję, która zależy od różnicy temperatur otoczenia i radiatora, trzeba wykorzystać uogólniony warunek Neumana postaci

$$\vec{n}k\nabla T + qT = g \tag{8}$$

gdzie $\vec{n}$ jest wektorem normalnym (prostopadłym) do brzegu obszaru, skierowanym na zewnątrz obszaru, g jest strumieniem ciepła, a q współczynnikiem wymiany ciepła. Klasyczny warunek Neumana[1] (dla $q = 0$) służy do określenia pochodnej kierunkowej T na brzegu, czyli zmiany rozwiązania T w kierunku normalnym do brzegu. Mówi on o prędkości z jaką ciepło przechodzi przez granicę obszaru. Warunek uogólniony (dla $q \neq 0$) pozwala uzależnić tą prędkość od różnicy temperatur $T - T_{ext}$.

W pdetool przejdź do trybu definiowania warunków brzegowych (`Boundary > Boundary Mode`). Zaznacz (trzymając wciśnięty klawisz SHIFT) wszystkie krawędzie prostokąta R1. Wybierz `Boundary > Specify boundary condition`. W otwartym oknie wybierz warunek Neumanna. Chcemy

[1]Istnieje jeszcze warunek Dirichleta $hT = r$, który pozwala określić np. temperaturę (a nie jej zmiany) na brzegu.



Rysunek 1: Widok radiatora i przymocowanych do niego dwóch tranzystorów od frontu.

aby na brzegu pochodna zmiany temperatury w kierunku normalnym do brzegu skierowana na zewnątrz wynosiła -0.1 różnicy temperatury otoczenia T_{ext} i temperatury T na brzegu (rozwiązania), czyli aby $\vec{n}k\nabla T = 0.1(T_{ext} - T)$. W tym celu rozpisujemy równanie na $\vec{n}k\nabla T = 0.1T_{ext} - 0.1T$, a następnie przenosimy składniki tak by ułożyć je w sposób zgodny z wzorem na uogólniony warunek Neumanna w oknie definiowania warunków brzegowych czyli $\vec{n}k\nabla T + 0.1T = 0.1T_{ext}$. Po przyrównaniu równań zauważamy, że $q = 0,1$ oraz $g = 0,1T_{ext}$. Przyjmij temperaturę otoczenia $T_{ext} = 35^0\mathrm{C}$. Wpisz powyższe wartości w polach `g` i `q`. Zamknij okno. Kliknij dwukrotnie na dolnej krawędzi. Dla tej krawędzi przyjmij 10–cio krotnie mniejszą konwekcję (możesz do już wpisanych parametrów g i q dopisać `/10`). Zapisz projekt[2]. Widzisz, że brzeg prostokąta R1, jest rysowany niebieskimi strzałkami. Warunki brzegowe Dirichleta są oznaczane strzałkami czerwonymi.

Przejdź do trybu definiowania równań `PDE > PDE Mode`. Włącz wyświetlanie etykiet poddomen `PDE > Show subdomain labels`. Widzisz trzy domeny do zdefinowania. Każda może posiadać różne wartości współczynników występujących w (7). Dwukrotnie kliknij na domenie odpowiadającej radiatorowi. Wybierz równanie eliptyczne i podaj współczynnik przewodzenia ciepła $k = 2$ (od niego zależy jak szybko ciepło może przepływać wewnątrz radiatora), źródł ciepła $Q = 0$ (bo radiator nie jest źródłem ciepła), współczynnik konwekcji przez powierzchnię $h = 0.05$ i temperaturę otoczenia $T_{ext} = 35^0\mathrm{C}$. Następnie dla lewego tranzystora podaj $Q = 55$ i pozostałe jak wcześniej. Dla prawego tranzystora przyjmij $Q = 50$, a resztę jak poprzednio. Zapisz projekt.

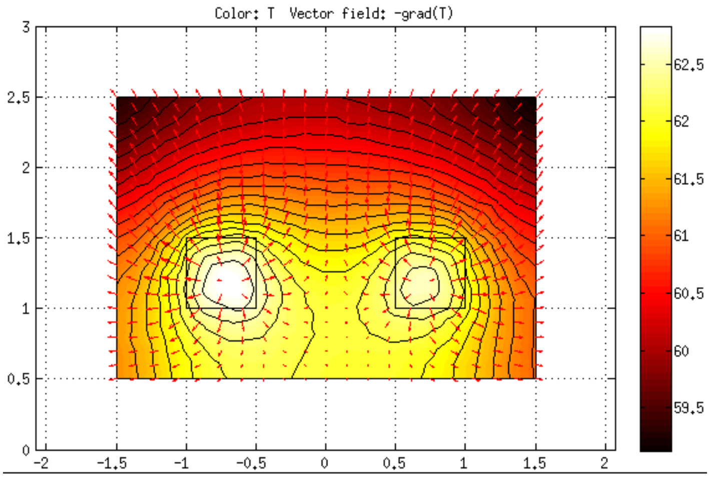
Przejdź do trybu generowania siatki `Mesh > Mesh Mode`. Przygotuj siatkę `Mesh > Initialize mesh`. Udoskonal siatkę `Mesh > Refine mesh`. Zapisz projekt :)

W tym wypadku nie potrzeba ustawiać parametrów solvera, więc od razu przejdź do rysowania wyników `Plot > Parameters`. W oknie parametrów wykresu włącz `Color`, `Contour`, `Arrows` (pokażą wartości i kierunki gradientu temperatur) oraz mapę kolorów `Colormap:Hot`. Wybierz `Plot` i zobacz wynik. Powinien być podobny jak na rysunku 2.

Widać, że wymiana ciepła przez dolną krawędź jest gorsza niż przez pozostałe, co za tym idzie temperatura w pobliżu górnej krawędzi jest niższa niż w pobliżu górnej krawędzi. Wynika to również z umieszczenia tranzystorów bliżej dolnej krawędzi. Patrząc na skalę wartości po prawej stronie rysunku widać niewielkie zróżnicowanie temperatur w całym obszarze. Zmniejsz 10 krotnie współczynnik przewodzenia ciepła samego radiatora i zobacz jak duże będzie zróżnicowanie temperatur. Zobacz też o ile wzrośnie temperatura tranzystorów gdy dodatkowo zmniejszysz 10 krotnie współczynnik konwekcji na powierzchni radiatora.

Przyjęte w tym i następnym zadaniu wartości współczynników, nie mają wiele wspólnego z faktycznymi parametrami materiałowymi. Zostały przyjęte tak, aby zadania dawały interesujące i możliwe w rzeczywistości wyniki.

[2]Narzędzie pdetool jest niedoskonałe i potrafi niemile zaskoczyć użytkownika

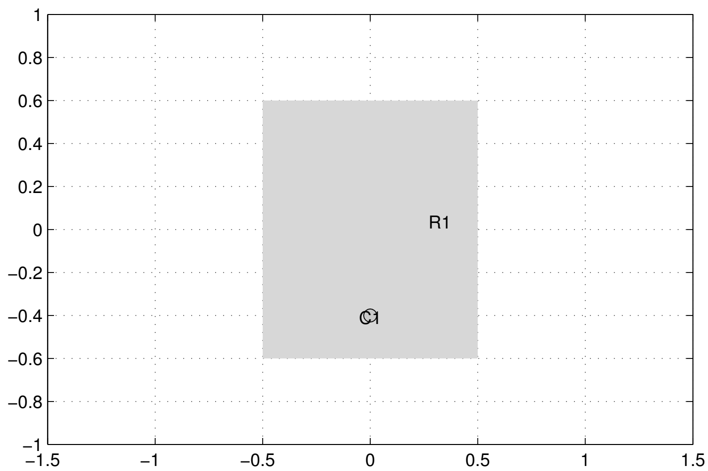


Rysunek 2: Rozkład temperatury oraz jej gradientów na radiatorze i przymocowanych do niego tranzystorach.

2 Dynamika nagrzewania cegły — 2 pkt

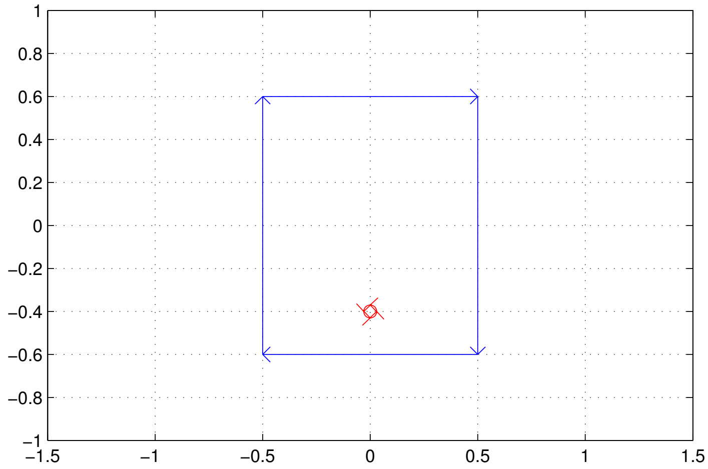
W tym zadaniu zajmiesz się dynamiką nagrzewania i stygnięcia cegły, przez którą przechodzi grzałka z drutu oporowego. Grzałka jest włączana na w chwili $t = 0$ i wyłączana po dziesięciu sekundach $t = 10$. Podobne zjawisko występuje w piecu akumulacyjnym. pdetool służy do rozwiązywania jedynie dwuwymiarowych problemów, więc trzeba przyjąć założenie, że cegła oraz poprowadzony w jej środku drut są długie (czyli rozkład pola nie zmienia się wzdłuż osi Z czyli prostopadłej do powierzchni kartki/monitora), a nas interesuje jedynie rozwiązanie w jednym z wielu jednakowych przekrojów cegły (czyli w płaszczyźnie X-Y).

W pdetool przygotuj opis geometrii problemu zgodnie z wymiarami na rysunku 3 (z poprzedniego zadania wiesz jak to zrobić). Prostokąt R1 to przekrój cegły, a koło C1 odpowiada otworowi, przez który przechodzi grzałka. Środek koła C1 ma się znajdować w położeniu (0; –0,4) i promień jego ma wynosić 0,03. Aby dokładnie ustawić wymiary kliknij dwukrotnie na narysowanym kole i wpisz je w okienku `Object Dialog`. W pdetool powyżej rysunku znajduje się linia zatytułowana `Set Formula` opisująca operacje logiczne na elementach rysunku. W linii tej wpisz `R1-C1`. Określ rodzaj problemu `Options > Application > Heat Transfer` związany z wymianą ciepła. Zapisz projekt.



Rysunek 3: Schematyczny obraz cegły wraz z otworem w jej środku.

Przejdź do trybu definiowania warunków brzegowych. Ponieważ wykonałeś operację odejmowania dwóch obiektów otrzymałeś jeden brzeg na zewnątrz cegły R1 oraz drugi w środku cegły wzdłuż otworu C1 (rysunek 4). Tym razem zamiast modelować źródło ciepła tak jak w poprzednim zadaniu, wykorzystamy warunki brzegowe otworu, przez który przechodzi grzałka. Zacznij od określenia warunków Neumana dla brzegów cegły. Przyjmij, że dolna krawędź cegły jest idealnie izolowana co daje $g = 0$, $q = 0$. Boki lewy, górny i prawy wymieniają ciepło przez konwekcję równą $0.05(T_{ext} - T)$ zależną od różnicy temperatur. Przyjmij temperaturę otoczenia $T_{ext} = 0^0\mathrm{C}$ co upraszcza warunek do $g = 0$, $q = 0.05$ (patrz poprzednie zadanie).

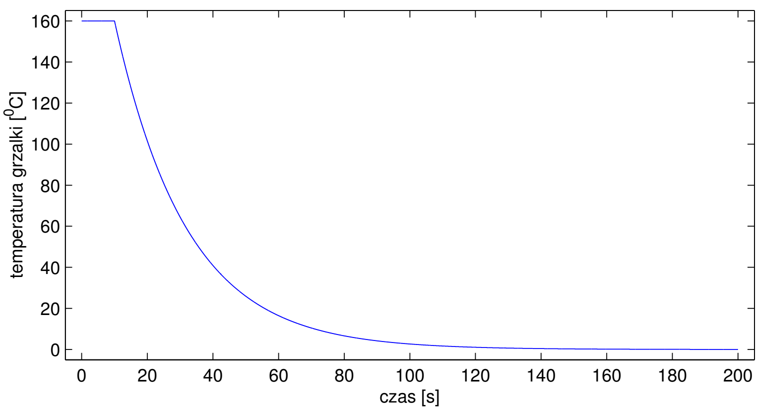


Rysunek 4: Warunki brzegowe: niebieski — Neumana, czerwony — Dirichleta.

Przedmiotem analizy jest dynamika nagrzewania i stygnięcia cegły w czasie, wobec czego warunek na brzegu otworu C1 będzie również zmienny w czasie[3]. Zakładamy, że temperatura T na brzegu otworu osiąga bardzo szybko (w zerowym czasie) wartość $160^0\mathrm{C}$, a po 10 sekundach zaczyna wykładniczo opadać do 0^0C. Przebieg temperatury w czasie, pokazany na rysunku 5, można opisać zależnością

$$T(t) = 80\big(1 - \mathrm{sign}(t-10)\big) + 80e^{-\frac{t-10}{22}}\big(\mathrm{sign}(t-10) - \mathrm{sign}(t-1000)\big) \tag{9}$$

Zaznacz (z SHIFT–em) wszystkie segmenty brzegu otworu C1 i wybierz `Boundary > Specify Bundary Conditions....` Jako r w warunku Dirichleta dla zaznaczonych segmentów podaj zależność temperatury od czasu (9). Pozostaw wagę $h = 1$.



Rysunek 5: Przebieg temperatury grzałki.

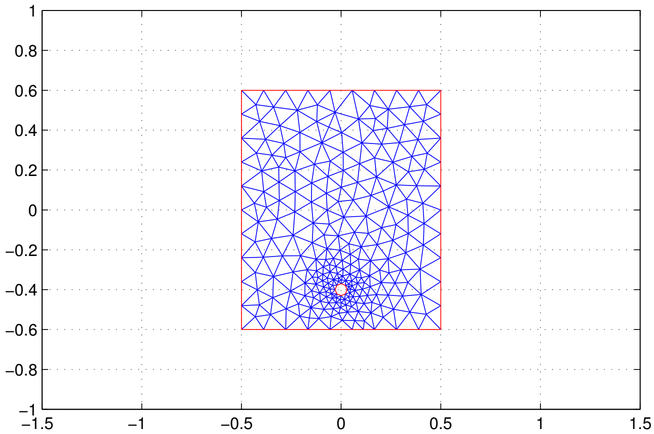
Przejdź do trybu PDE (`PDE > PDE Mode`). Kliknij dwukrotnie na rysunku cegły. W tym zadaniu analizujemy przebieg czasowy dlatego wybierz równanie paraboliczne (eliptyczne nie zależy od czasu) postaci

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q + h(T_{ext} - T) \tag{10}$$

gdzie ρ jest gęstością materiału, C pojemnością cieplną, a pozostałe parametry mają takie znaczenie jak w równaniu eliptycznym (7) z poprzedniego zadania.

[3]Właściwie większość współczynników w warunkach brzegowych oraz opisie równań oraz warunków początkowych może zależeć od czasu i położenia, a nawet wartości i pochodne rozwiązania. Nazwy zmiennych, które można wykorzystać to: czas `t`, położenie `x`, `y`, wartość pola w punkcie `u`, wartości pochodnych rozwiązania po obu kierunkach `ux`, `uy`.

Wpisz w oknie $rho = 1$, $C = 20$, $k = 0.2$, $Q = 0$, $h = 0$, $T_{ext} = 0$. $h = 0$ oznacza brak konwekcji, bo rozpatrujemy zjawiska w przekroju, a nie na powierzchni cegły. $Q = 0$ oznacza, że cegła nie jest źródłem ciepła (za źródło służy zmienny w czasie warunek na brzegu otworu). Wygeneruj siatkę trójkątów `Mesh > Initialize Mesh` (rysunek 6) i zapisz projekt.



Rysunek 6: Siatka trójkątów metody elementów skończonych.

Otwórz okno ustawień solvera (`Solve > Parameters`) i podaj w nim wektor chwil czasowych, dla których obliczone zostanie rozwiązanie. Interesuje nas przedział czasu od 0.1 sekundy do 1000 sekund. Dynamika obserwowanego zjawiska jest znacznie większa na początku (nagrzewanie), a niewielka pod koniec czasu symulacji (stygnięcie). Z tego powodu wektor czasu powinien zawierać wartości logarytmicznie rozłożone. W polu `Time` podaj wektor wartości od 10^{-1} do 10^3 złożony z 100 elementów (można podać komendę Matlaba, która taki wektor generuje). Aby obserwować przebieg nagrzewania podaj wartość początkową temperatury $u(t_0) = 0$. Zapisz projekt.

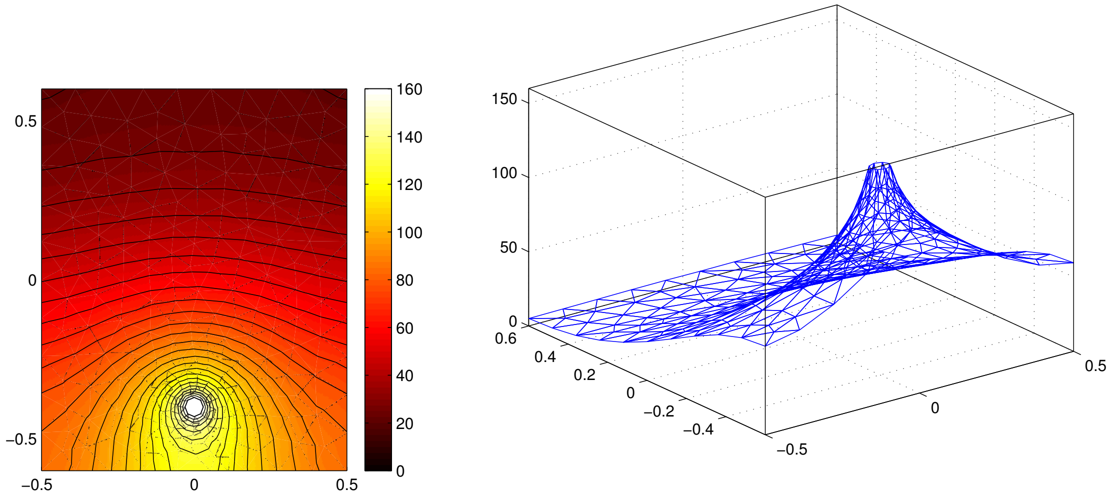
Otwórz okno parametrów wykresu `Plot > Parameters`. Włącz parametry `Color`, `Arrows`, `Animation`, `Colormap:Hot` i w okienku `Options` podaj ilość powtórzeń animacji równą 2. Naciśnij `Plot` aby zobaczyć przebieg rozwiązania.

Jak widzisz stygnięcie cegły oraz grzałki trwa znacznie dłużej niż jej nagrzewanie. Przy tak dobranych parametrach przebiegu temperatury grzałki grzałka stygnie nieco szybciej niż cegła, co widać po kierunkach wektorów gradientu temperatury pod koniec symulacji. Zauważ także dwie niedogodności. Skala wartości po prawej stronie okna animacji pokazuje złe wartości (maksymalna temperatura powinna wynosić $160^0\mathrm{C}$). Długość wektorów gradientu jest automatycznie skalowana tak, żeby dobrze wyglądały na rysunku, co oznacza, że jeśli nawet gradient jest bardzo mały, ale jego wartości na całym obszarze są sobie bliskie to wektory będą długie. Jak się zapewne domyślasz pod koniec symulacji, kiedy cegła ostygnie do początkowej temperatury długości strzałek powinny byc minimalne.

Włącz opcję `Height 3-D plot` i ponownie wygeneruj wyniki (animację). Zauważ, że ze względu na skalowanie niewiele widać na wykresie.

Aby zobaczyć rozwiązanie zawierające właściwe skale osi i temperatury wyeksportuj opis siatki i rozwiązanie do przestrzeni danych Matlaba za pomocą `Mesh > Export Mesh` i `Solve > Export Solution`. W przestrzeni danych otrzymasz macierze `p, r, t` opisujące siatkę oraz macierz `u` zawierający rozwiązania w kolejnych chwilach czasowych. Korzystając ze szkieletu programu w pliku `lab12z02.m` wygeneruj 2 rodzaje animacji. Pierwsza ma przedstawiać rozkład temperatur widziany z góry, w kolorystyce `'hot'`, a druga ma przedstawiać widok trójwymiarowy siatki pokazującej wartość temperatury w danym punkcie przekroju. Kolejne klatki generować należy poleceniem `pdeplot`. Przy jego wywołaniu należy podać również odpowiednie pary własności (ang *properties*), co jest wyjaśnione w helpie. Wybrane klatki obu animacji pokazano na rysunku 7.

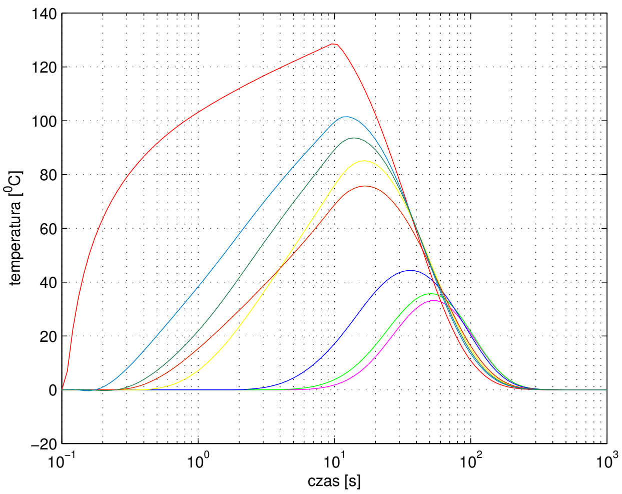
Korzystając z wyeksportowanego rozwiązania (zmienna `u`) wyznacz najmniejszą wartość temperatury w cegle w 40 kroku symulacji procesu. Sprawdź jakiej wartości czasu odpowiada 40 krok, poprzez sprawdzenie wartości 40 elementu logarytmicznego wektora czasu zdefiniowanego w zadaniu. Następnie wyznacz



Rysunek 7: Wybrane klatki animacji przebiegu rozkładu temperatury w czasie.

rozwiązania w dowolnie zadanych chwilach czasu i oblicz skrajne wartości temperatur w zadanych chwilach.

Za pomocą odpowiednio skonstruowanego polecenia find znajdź w zbiorze punktów siatki (zmienna p) indeks lewego górnego punktu cegły (o współrzędnych $[-0.5; 0.6]$). Następnie w nowym oknie wykresu wyrysuj przebieg czasowy zmian temperatury w tym punkcie (rozwiązanie dla każdego punktu siatki oraz każdej chwili czasowej znajduje się w macierzy u). Określ maksymalną temperaturę na analizowanym rogu cegły podczas całego procesu. Przykładowe przebiegi temperatur w wybranych punktach siatki pokazano na rysunku 8.



Rysunek 8: Przebiegi czasowe temperatur w wybranych punktach siatki.

Jeśli istnieje potrzeba np. całkowania wyników po obu kierunkach układu współrzędnych, a do dyspozycji są wartości rozwiązania w węzłowych punktach siatki (wektor u) to można skorzystać z polecenia `tri2grid` aby przetransformować wyniki do siatki prostokątnej, co ułatwi dalsze operacje.

3 Rozkład linii pola magnetycznego w silniku — 2 pkt

W tym zadaniu wygenerujesz rozkład linii statycznego pola magnetycznego w przekroju długiego silnika dwubiegunowego. Jest to zadanie z magnetostatyki, która opisuje pole magnetyczne w stanie ustalonym.

Obowiązują zatem równania Maxwella dla stanu ustalonego

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \quad \text{oraz} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{11}$$

i zależność

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{12}$$

gdzie $\boldsymbol{H}$ jest natężeniem pola magnetycznego, $\boldsymbol{B}$ indukcją magnetyczną (gęstością strumienia magnetycznego), $\boldsymbol{J}$ gęstością prądu, a μ jest przenikalnością magnetyczną ośrodka.

Jako, że pole magnetyczne jest bezźródłowe, czyli $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, to istnieje magnetyczny potencjał wektorowy $\boldsymbol{A}$ taki, że jego rotacja jest równa indukcji pola magnetycznego

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \quad \text{oraz} \quad \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A} \right) = \boldsymbol{J} \tag{13}$$

W analizie 2D zakładamy, że prąd płynie równolegle do osi Z, więc istnieje tylko jedna składowa (Z) A magnetycznego potencjału wektorowego $\boldsymbol{A}$, będąca poszukiwanym rozwiązaniem zadania,

$$\boldsymbol{A} = [0, 0, A] \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{J} = [0, 0, J] \tag{14}$$

i dlatego równanie (13) upraszcza się do skalarnego eliptycznego równania

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla A \right) = J \tag{15}$$

gdzie J jest funkcją położenia $J(x, y)$. Dla tego przypadku można obliczyć indukcję oraz natężenie pola

$$\boldsymbol{B} = \left[\frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x}, 0 \right] \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B} \tag{16}$$

Warunki na krawędziach dwóch różnych ośrodków (np. metal stojanu i szczelina powietrzna) powinny gwarantować ciągłość $\boldsymbol{H} \times \vec{n}$ czyli inaczej ciągłość $\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial \vec{n}}$. Z powodu nieliniowej zależności przenikalności μ od indukcji $\boldsymbol{B}$ w materiałach ferromagnetycznych konieczne jest użycie nieliniowego solvera.

Domena rozwiązania składa się z następujących regionów: ferromagnetyczne stojan i wirnik, szczelina powietrzna pomiędzy nimi, cewka przewodząca stały prąd. Przenikalność magnetyczna w stalowych wirniku i stojanie jest zależna od indukcji magnetycznej, a więc także od skalarnego potencjału A

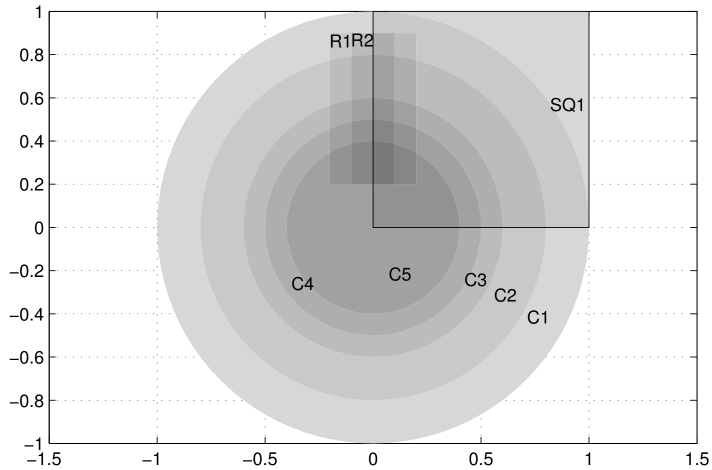
$$\mu = \frac{\mu_{max}}{1 + c||\nabla A||^2} + \mu_{min} \tag{17}$$

gdzie $\mu_{max} = 5000$, $\mu_{min} = 200$, $c = 0.05$ są wartościami typowymi dla stali transformatorowej. Gęstość prądu w cewce wynosi 1, a w pozostałych regionach 0. Ze względu na symetrię budowy silnika rozkład potencjału $\boldsymbol{A}$ jest symetryczny względem osi Y i antysymetryczny względem osi X. Wobec tego można ograniczyć obszar analizy do regionu $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$, środek silnika znajduje się w punkcie $(0, 0)$. Trzeba również zadać warunek brzegowy Dirichleta $A = 0$ na osi Y oraz warunek brzegowy Neumanna $\vec{n}(\frac{1}{\mu}\nabla A) = 0$ na osi X. Pole magnetyczne poza silnikiem jest zaniedbywane przez zadanie na zewnętrznej krawędzi silnika warunku Dirichleta $A = 0$.

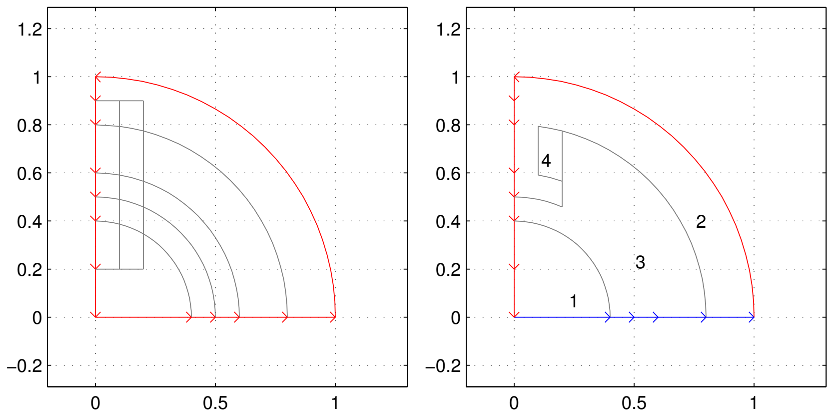
Geometria problemu jest skomplikowana, gdyż składa się z pięciu kół, dwóch prostokątów i jednego kwadratu. Geometrię pokazaną na rysunku 9 zdefiniujesz za pomocą poleceń `pdecirc` i `pderect` (przeczytaj ich opis). Narysuj poleceniem `pdecirc` pięć współśrodkowych kół o środku w $(0, 0)$, kolejnych promieniach $1; 0,8; 0,6; 0,5; 0,4$ i kolejnych nazwach C1, C2, C3, C4, C5. Narysuj poleceniem `pderect` dwa prostokąty i kwadrat o kolejnych nazwach R1, R2, SQ1 i kolejnych położeniach wierzchołków $[-0,2; 0,2; 0,2; 0,9]$, $[-0,1; 0,1; 0,2; 0,9]$, $[0; 1; 0; 1]$. Po narysowaniu w linii `Set formula:` wpisz `(C1+C2+C3+C4+C5+R1+R2)*SQ1` co ograniczy domenę w.w. zakresów. Zapisz projekt.

Przejdź do trybu definiowania warunków brzegowych. Zaznaczaj niepotrzebne granice poddomen (z SHIFTem) i usuwaj je poleceniem `Boundary > Remove Subdomain Border`, aż osiągniesz efekt taki jak po prawej stronie rysunku 10. Dla wszystkich odcinków brzegu wzdłuż osi X ustaw warunek Neumanna $g = q = 0$. Zapisz projekt.

Przejdź do trybu definiowania równań. W cewce zarówno μ jak i J są równe 1 więc nie trzeba zmieniać domyślnych wartości. W stojanie i wirniku przenikalność μ jest nieliniowa i opisana wzorem (17). Zaznacz



Rysunek 9: Geometria silnika.



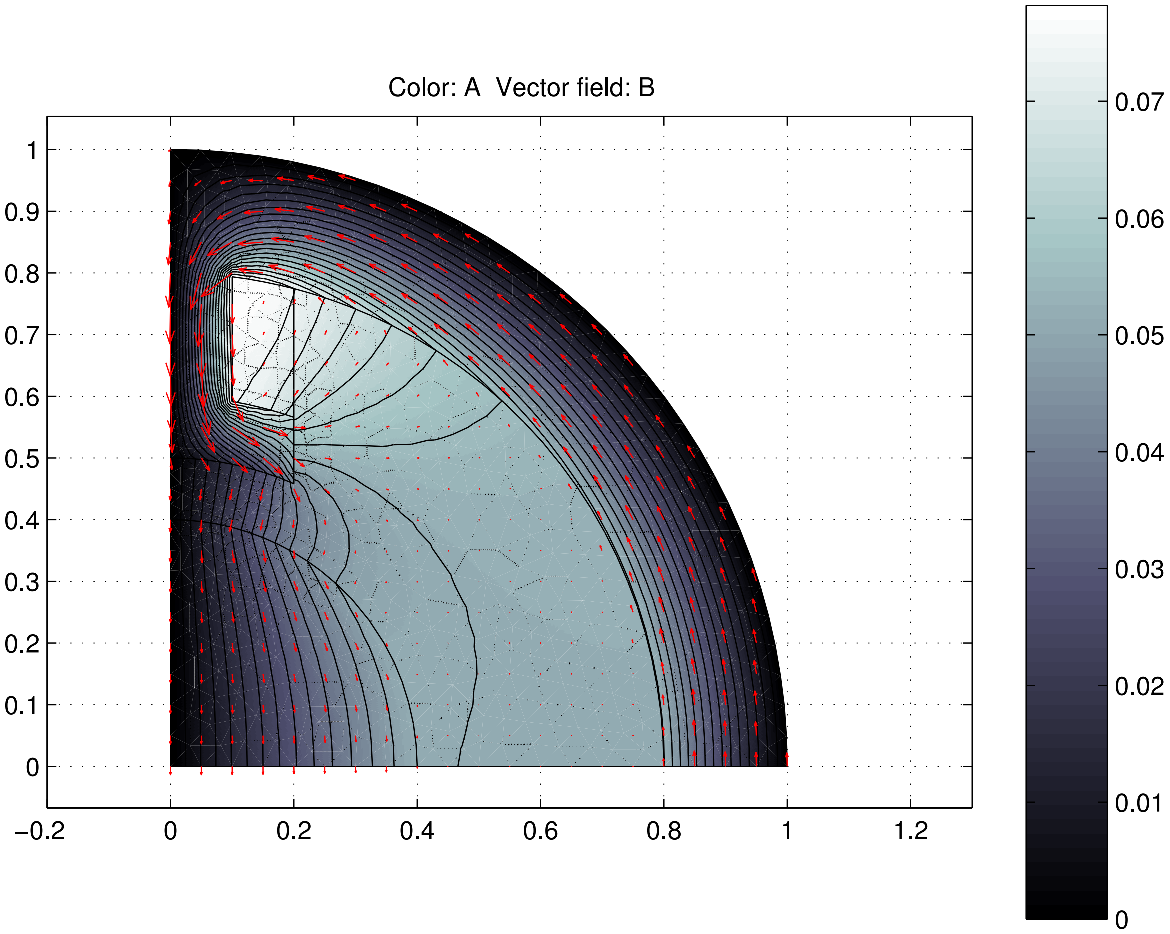
Rysunek 10: Przed (po lewej) i po (po prawej) usunięciu zbędnych granic poddomen. 1 wirnik, 2 stojan, 3 szczelina powietrzna, 4 cewka. Twoja numeracja poddomen może być inna niż na rysunku.

jednocześnie stojan i wirnik, wybierz `PDE > PDE Specification..` i zapisz zależność (17) w notacji Matlaba pamiętając, że $||\nabla A||^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2$. Pochodna $\frac{\partial A}{\partial x}$ jest zwawarta w zmiennej ux, a pochodna $\frac{\partial A}{\partial y}$ jest zwawarta w zmiennej uy. Pamiętaj również, że Matlab operuje na wektorach i przed mnożeniem, dzieleniem i podnoszeniem do potęgi trzeba dać znak kropki (np. `.^`). W wirniku i stojanie prąd nie płynie więc wpisz $J = 0$. Dla szczeliny powietrznej wpisz wartości $\mu = 1$ oraz $J = 0$. Zapisz projekt.

Wygeneruj siatkę trójkątów. W parametrach solvera (`Solve > Parameters`) włącz opcję `Use nonlinear solver`. Przejdź do parametrów wykresu `Plot > Parameters`. Zaznacz jedynie opcje `Contour`, `Arrows` i `Colormap:bone`. Narysuj wyniki, powinny być podobne jak na rysunku 11. Zobacz jak zmienią się linie pola jeśli zwiększysz dokładność siatki `Mesh > Refine mesh` i jeszcze raz narysujesz rozwiązanie.

Na następne zajęcia

Sieci neuronowe.



Rysunek 11: Rozkład potencjału magnetycznego (kolor) i wektorów indukcji (strzałki) w silniku.

Literatura

[1] Guziak T., Kamińska A., Pańczyk B., Sikora J. *Metody numeryczne w elektrotechnice* Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin 2002.

[2] Edward Kącki, Andrzej Małolepszy, Alicja Romanowicz *Metody numeryczne dla inżynierów* Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1997.