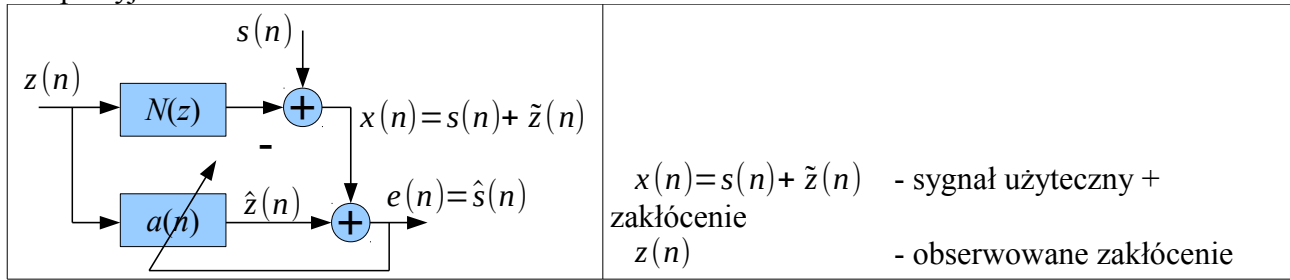


Filtr adaptacyjny

Adaptacyjne usuwanie zakłóceń



Zadaniem filtru adaptacyjnego jest wytworzenie (na podstawie sygnału $z(n)$) estymaty sygnału zakłócającego $\tilde{z}(n)$, która mogła by być odjęta od mierzonego sygnału

$$\hat{z}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a(i) z(n-i)$$

Filtr adaptacyjny będzie minimalizował błąd estymaty sygnału zakłócającego:

$$e(n) = x(n) - \hat{z}(n) = s(n) + [\tilde{z}(n) - \sum_{i=0}^{N-1} a(i) z(n-i)]$$

$$Q(a) = E[e^2(n)]$$

$$\frac{\partial Q(a)}{\partial a(k)} = \frac{\partial}{\partial a(k)} E \left[\left(x(n) - \sum_{i=0}^{N-1} a(i) z(n-i) \right)^2 \right] = -2 E \left[\left(x(n) - \sum_{i=0}^{N-1} a(i) z(n-i) \right) z(n-k) \right] = 0$$

$$r_{xz}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} a(i) R_{zz}(i-k), \quad k=0, \dots, N-1, \quad \mathbf{r}_{xz} = \mathbf{a} \mathbf{R}_{zz}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{R}_{zz}^{-1} \mathbf{r}_{xz}$$

Algorytm gradientowy filtru adaptacyjnego

Algorytm ten uaktualnia wartości współczynników $a(k)$ filtra

$$a^n(k) = a^{n-1}(k) + \Delta a(k),$$

tak by spowodować redukcję błędu średniokwadratowego tj.

$$Q(\mathbf{a}^n + \Delta \mathbf{a}^n) \leq Q(\mathbf{a}^n)$$

Minimalizowane kryterium Q jest formą kwadratową (w przypadku skalarnym, tj. dla $N=1$ jest to parabola). Można więc zastosować poniższy algorytm uaktualniania współczynników filtra

$$a^n(k) = a^{n-1}(k) - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial Q(\mathbf{a})}{\partial a(k)}$$

ponieważ

$$\frac{\partial Q(\mathbf{a})}{\partial a(k)} = 2(\mathbf{R}_{zz} \mathbf{a} - \mathbf{r}_{xz})$$

$$\mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{n-1} + \mu [\mathbf{r}_{xz} - \mathbf{R}_{zz} \mathbf{a}]$$

Jeśli zdecydujemy się na kryterium jakości w postaci $Q(\mathbf{a}) = e^2(n)$ to

$$\frac{\partial Q(\mathbf{a})}{\partial a(k)} = e(n) z(n-k)$$

oraz

$$a^n(k) = a^{n-1}(k) + \mu e(n) z(n-k)$$

Powyższy algorytm znany jest w literaturze jako LMS.

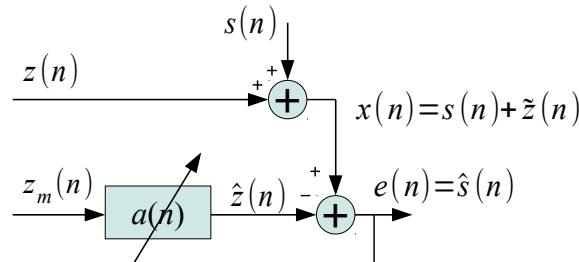
Przykład

Przypuśćmy, że mamy obiekt generujący sygnał o liniowo narastającej częstotliwości. Szybkość narastania częstotliwości wynosi $k=25\text{Hz/s}$, a częstotliwość początkowa $f_0=0$. Sygnał (analogowy) z obiektu opisany jest zależnością $s(t) = \cos(2\pi f_0 t + 0.5(2\pi k)t^2)$. Wykres pierwszych $N=1000$ próbek sygnału pobranych przy częstotliwości próbkowania $f_{pr}=1000\text{Hz}$ pokazany jest na Rys 2.

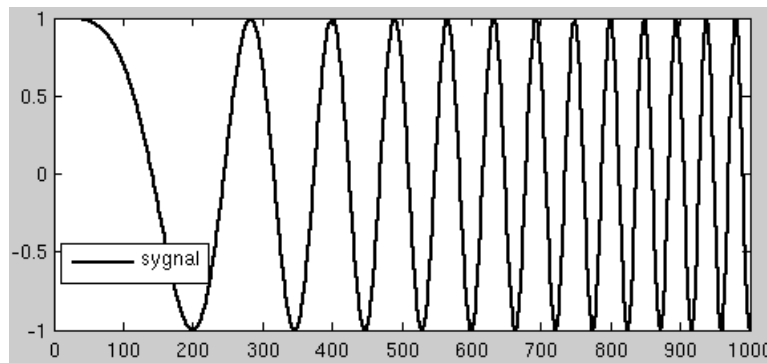
Mierzony sygnał $s(n)$ jest zakłócony przydzwiękiem sieci elektroenergetycznej tj. $z(t)=\sin(2\pi 50t)$ (patrz Rys. 1). Jednocześnie dostępny jest pomiar sygnału zakłócającego, ale o zmienionej amplitudzie i przesunięciu fazowym tj. $z_m(t)=0.1\sin(2\pi 50t-\pi/5)$. Do usunięcia przydzwięku zastosowano filtr adaptacyjny typu NLMS posiadający $M=10$ współczynników z parametrem $\mu=0.1$

$$a^n(k) = a^{n-1}(k) + \frac{\mu}{0.001 + \sum_{k=0}^{M-1} z_m^2(n-k)} e(n) z_m(n-k)$$

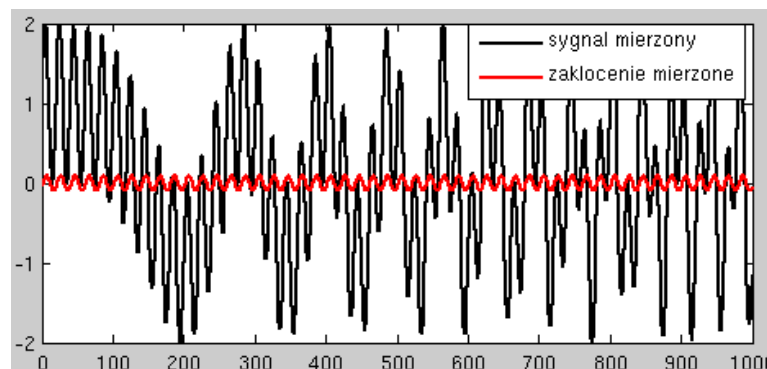
Wynik działania filtru tj. $N=1000$ próbek sygnału $\hat{s}(n)=e(n)$ pokazano na ostatnim rysunku.



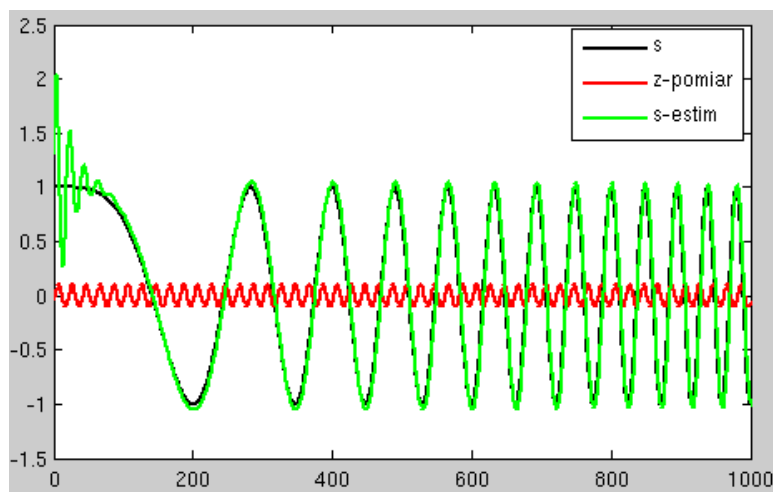
Rys. 1. Filtr adaptacyjny redukujący zakłócenia.



Rys. 2. Sygnał generowany przez obiekt.

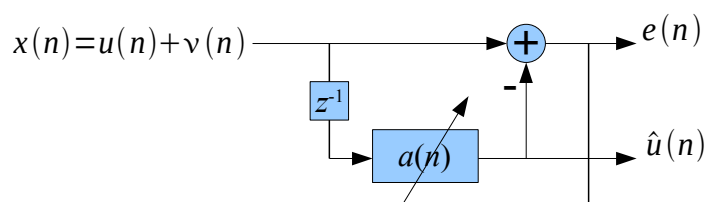


Rys. 3. Sygnał mierzony oraz sygnał zakłócający.



Rys. 4. Sygnał po filtracji adaptacyjnej $\hat{s}(n)$.

Adaptacyjny filtr odsumiający



Rys. Adaptacyjny filtr odsumiający

Zakładamy, że bieżącą próbkę sygnału (np. mowy) można z małym błędem przedstawić jako liniową kombinację próbek poprzednich, tj. można ją przewidzieć. Oczywiście szumu przewidzieć się nie da!

$$\hat{u}(n) = \sum_{i=1}^N a(i) x(n-i) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}_n, \quad \mathbf{x}_n = [x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N)]$$

$$Q(\mathbf{a}) = E[e^2(n)] = E \left[\left(x(n) - \sum_{i=1}^N a(i) x(n-i) \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial a(k)} = \frac{\partial}{\partial a(k)} E \left[\left(x(n) - \sum_{i=1}^N a(i) x(n-i) \right)^2 \right] = 2 E \left[\left(x(n) - \sum_{i=1}^N a(i) x(n-i) \right) x(n-k) \right] = 0$$

$$R_{xx}(k) = \sum_{i=1}^N a(i) R_{xx}(i-k), \quad k=1, 2, \dots, N$$

Wyznaczenie współczynników filtra wg powyższego równania wymaga wyznaczenia odwrotności macierzy autokorelacji sygnału. Można tego uniknąć stosując algorytm filtra z adaptacją w wersji gradientowej. Algorytm ten uaktualnia wektor współczynników filtra

$$\mathbf{a}^n(k) = \mathbf{a}^{n-1}(k) + \Delta \mathbf{a}(k),$$

tak by spowodować redukcję błędu średniokwadratowego tj.

$$Q(\mathbf{a}^n + \Delta \mathbf{a}^n) \leq Q(\mathbf{a}^n)$$

Minimalizowane kryterium Q jest formą kwadratową (w przypadku skalarnym, tj. dla $N=1$ jest to parabola). Można więc zastosować poniższy algorytm uaktualniania współczynników filtra

$$\mathbf{a}^n(k) = \mathbf{a}^{n-1}(k) - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial Q(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}(k)}$$

Jeśli zdecydujemy się na kryterium jakości w postaci $Q(\mathbf{a}) = e^2(n)$ to

$$\frac{\partial Q(\mathbf{a})}{\partial a(k)} = -2e(n)x(n-k)$$

oraz

$$a^n(k) = a^{n-1}(k) + \mu e(n)x(n-k)$$

Powyższy algorytm znany jest w literaturze jako LMS.

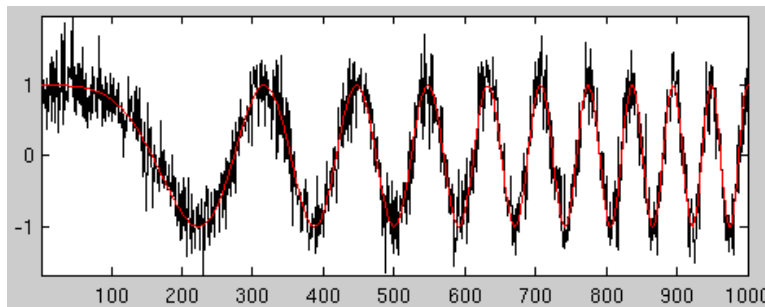
Często stosuje się nieco inny wariant tzw. NLMS tj. unormowany LMS. Równanie adaptacji ma wtedy postać

$$a^n(k) = a^{n-1}(k) + \mu \frac{e(n)}{\epsilon + \sum_{l=0}^{N-1} x^2(n-l)} x(n-k),$$

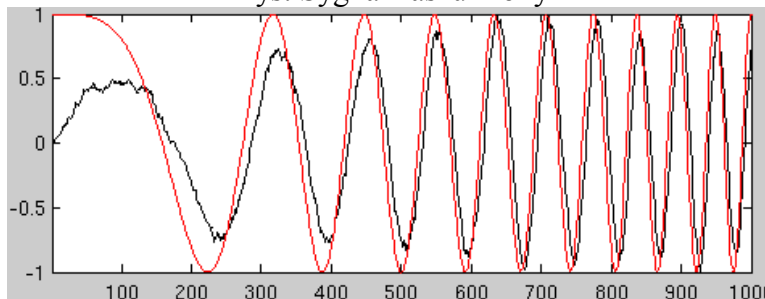
gdzie ϵ jest małą dodatnią liczbą.

Przykład – filtr odszumiający NLMS

```
....fpr=1000; N=1000; n=1:N
....s = cos(20*pi*(n/fpr).^2)
....x=s+0.3*randn(size(s));
....mi = 0.01;
....M=50; %rzad filtra
```



Rys. Sygnał zaszumiony



Rys. Sygnał po procesie adaptacyjnego odszumiania (czarny) i sygnał oryginalny (czerwony).

Literatura:

T. Zieliński: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, WKŁ