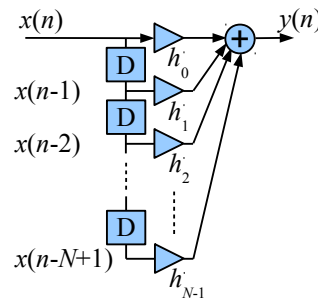


Układy dyskretne LTI – projektowanie filtrów typu FIR

Z1. Napisać funkcję $y = \text{filtruj}(x, h)$, która wyznacza sygnał y będący wynikiem filtracji sygnału x przez filtr FIR o odpowiedzi impulsowej h . Implementację należy wykonać w oparciu o schemat blokowy pokazany poniżej.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k),$$



Uzyskany wynik porównać z funkcją *filter* z Matlaba. Do testowania testowania poprawności działania użyć sygnałów $x = [1 \ 2 \ 3]$, $h = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$: *filter(h, 1, x)*.

Z2. Napisać funkcję (ewentualnie skrypt) wyznaczającą próbki odpowiedzi impulsowej filtru dolnoprzepustowego o częstotliwości granicznej $\omega_g = \pi/4$ i górnoprzepustowego o $\omega_g = \pi/8$. Odpowiedź impulsowa idealnego (nie obciążonego) filtru o charakterystyce częstotliwościowej $H(e^{j\omega})$ dana jest wzorem:

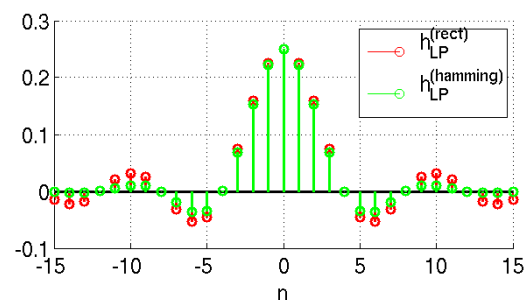
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad -\infty < n < \infty.$$

Odpowiedź impulsowa dolnoprzepustowego filtru typu FIR jest równa:

$$h_{LP}(n) = \begin{cases} \frac{\omega_g}{\pi}, & n=0 \\ \frac{\sin(\omega_g n)}{\pi n}, & n \neq 0 \end{cases},$$

Po obcięciu oknem $w(n)$ mamy:

$$h_{LP}^w(n) = w(n) h_{LP}(n), \quad -N \leq n \leq N.$$



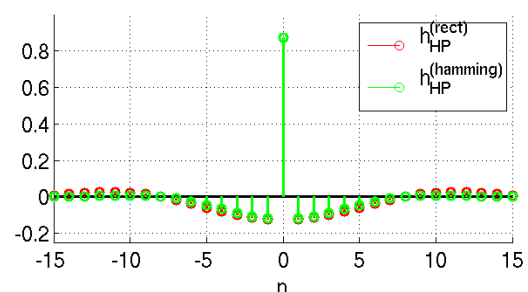
Rys. Odpowiedzi impulsowe filtrów z oknem prostokątnym i oknem Hamminga, $N=15$, $\omega_g = \pi/4$.

Odpowiedź impulsowa górnoprzepustowego filtru typu FIR z oknem $w(n)$ jest równa:

$$h_{HP}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_g}{\pi}, & n=0 \\ -\frac{\sin(\omega_g n)}{\pi n}, & n \neq 0 \end{cases},$$

Po obcięciu oknem $w(n)$ mamy:

$$h_{HP}^w(n) = w(n) h_{HP}(n), \quad -N \leq n \leq N.$$

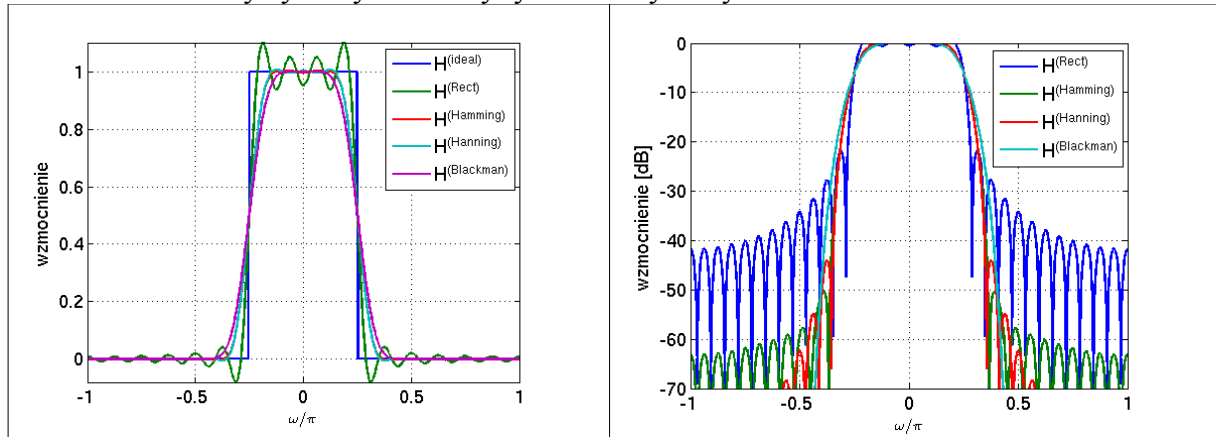


Rys. Odpowiedzi impulsowe filtrów z oknem prostokątnym i oknem Hamminga, $N=15$, $\omega_g = \pi/8$.

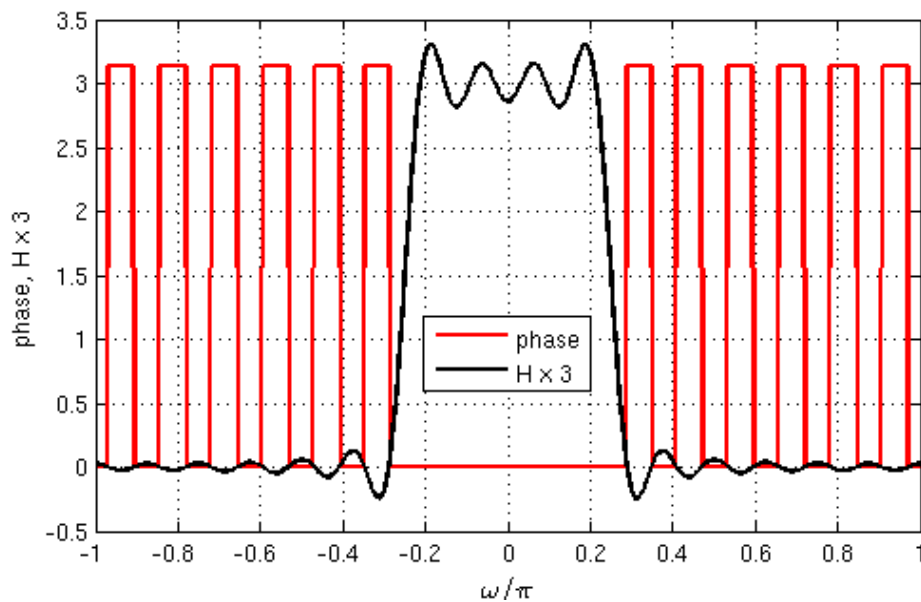
Uwaga: funkcja okna czasowego $w(n)$ może być uzyskana w wyniku wywołania funkcji: *hamming* lub *blackman* pakietu Matlaba. Odpowiedzi impulsowe narysowano funkcją *stem*.

Z3a. Korzystając ze wzoru $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N}^N h(n)e^{-j\omega n}$,

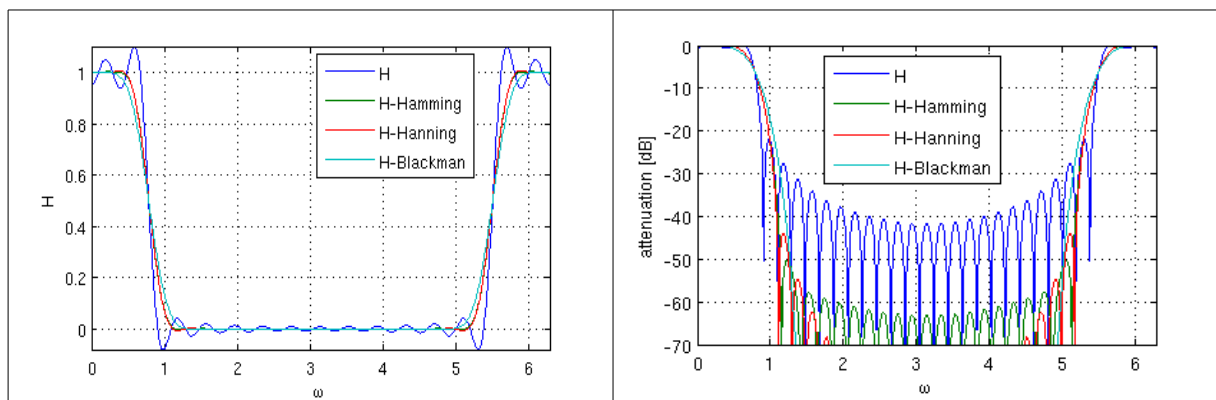
wyznaczyć ch-kę częstotliwościową filtrów z poprzedniego zadania dla różnych funkcji okien, przy $N=15$. Uwaga: zmienna ω jest ciągła, więc w przypadku realizacji komputerowej wartości charakterystyki wyznaczamy tylko dla wybranych wartości ω .



Ponieważ wyznaczana funkcja $H(e^{j\omega})$ jest zespolona, to zwykle przedstawia się jej przebieg w postaci dwóch wykresów: modułu *abs*, zwanego ch-ką amplitudową, i argumentu *angle*, zwanego ch-ką fazową. Ch-kę amplitudową zwykle przedstawia się stosując skalę logarymiczną dla osi Y. Poniżej pokazano charakterystykę amplitudową (bez modułu, ale przeskalowaną w wartości 3 x) oraz charakterystykę fazową.



Uwaga: zwróć uwagę i przekonaj się doświadczalnie, że funkcja $H(e^{j\omega})$ jest okresowa.



Z3b. Wyznaczyć ch-kę częstotliwościową filtrów z poprzedniego zadania dla różnych funkcji okien używając funkcji *freqz*. Uwaga: funkcja *freqz* wyznacza ch-kę filtru przyczynowego tzn. korzysta ze wzoru

$$H_p(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} h_p(n) e^{-j\omega n},$$

gdzie $L = 2N+1$ jest długością odpowiedzi impulsowej $h_p(n) = h(n-N)$. Wywołanie $[Hp, W] = \text{freqz}(h)$ zwraca wektor próbek charakterystyki częstotliwościowej Hp oraz wektor wartości częstotliwości W , w których charakterystyka ta została wyliczona. Wywołanie $\text{freqz}(h)$, z pominięciem argumentów wynikowych Hp i W , rysuje charakterystykę amplitudową i fazową. Charakterystyki obliczone przez funkcję *freqz* należy porównać z wynikami z punktu 3a. Następnie należy je skorygować (wektor Hp), tak by uzyskać charakterystykę filtru nieprzyczynowego tj. H tak jak w zadaniu 3a.

$$H_p(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{2N} h_p(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{2N} h(n-N) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^N h(n) e^{-j\omega(n+N)} = e^{-j\omega N} H(e^{j\omega}).$$

Z4. Zaprojektować cyfrowy filtr dolnoprzepustowy (z oknem Hamminga, o długości $31=2*15+1$) o częstotliwości granicznej $f_0 = 150$ Hz, przy częstotliwości próbkowania $f_p = 1000$ Hz. Narysować ch-kę amplitudową. Sprawdzić działanie zaprojektowanego filtru poprzez filtrację sygnału złożonego z dwóch sinusoid (x_1 i x_2) o częstotliwościach $f_1 = 100$ Hz i $f_2 = 250$ Hz.

W rozwiązaniu możesz wykorzystać plik: `fir_z4_dane.m`, który należy włączyć na początku skryptu w następujący sposób:

`fir_z4_dane % czyli nazwa pliku bez rozszerzenia m`

Pytania testowe.

(1) Wyznacz (bez korzystania z wykresu) wzmocnienie filtra dla częstotliwości f_0, f_1, f_2 dla okna prostokątnego i okna Hamminga.

(2) Filtracja przyczynowa wprowadza opóźnienie wynoszące połowę długości filtra (u nas 15 próbek). Aby się o tym przekonać, narysuj na jednym wykresie sygnał oryginalny (x_1 o częstotliwości f_1) opóźniony o 15 próbek oraz sygnał z wyjścia filtra. Od której chwili, Twoim zdaniem, próbki pokrywają się z minimalnym błędem. Od której chwili powinny pokrywać się wg teorii. Dlaczego nie pokrywają się idealnie, dlaczego błąd nie jest 0?

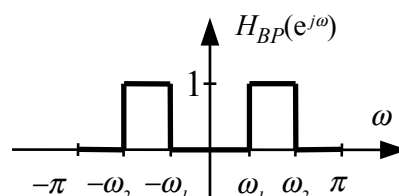
Z5a. Korzystając z metody okien wyznaczyć (analitycznie) odpowiedź impulsową idealnego filtra pasmowo-przepustowego $h_{BP}(n)$, a następnie obciąć ją wybranym oknem uzyskując $h_{BP}^W(n)$. Charakterystyka częstotliwościowa $H_{BP}(e^{j\omega})$ filtra idealnego pokazana jest poniżej.

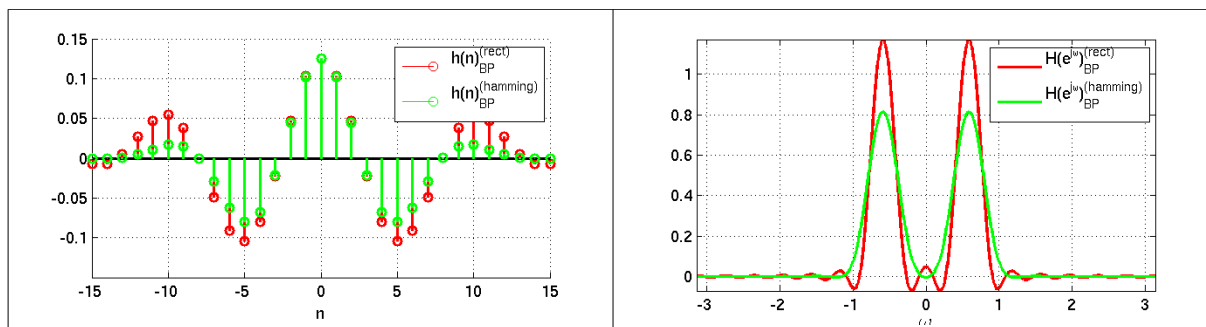
Napisać skrypt w Matlabie rysujący odpowiedź impulsową (funkcja *stem*) oraz charakterystykę częstotliwościową zaprojektowanego filtra. Przykładowa charakterystyka częstotliwościowa filtra z oknem prostokątnym i oknem Hamminga dla $N=15$, $\omega_1 = \pi/8$, $\omega_2 = \pi/4$, poniżej.

Uwaga: do realizacji tego zadania można wykorzystać wynik zadania 2.

$$h_{BP}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{BP}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

$$h_{BP}^W(n) = w(n) h_{BP}(n) \\ -N \leq n \leq N$$



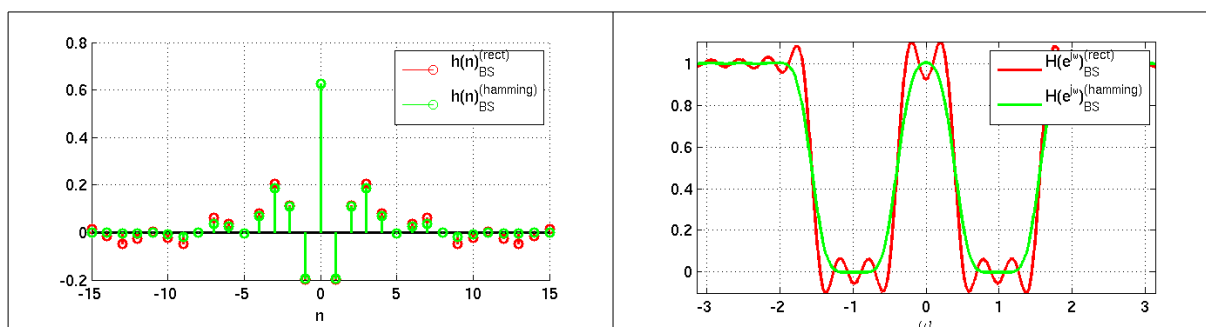
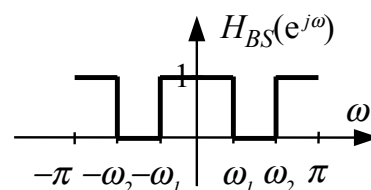


Z5b. Korzystając z metody okien wyznaczyć (analitycznie) odpowiedź impulsową idealnego filtra pasmowo-zaporowego $h_{BS}(n)$, a następnie obciąć ją wybranym oknem uzyskując $h_{BS}^W(n)$. Charakterystyka częstotliwościowa $H_{BS}(e^{j\omega})$ filtra idealnego pokazana jest poniżej. Napisać skrypt w Matlabie rysujący odpowiedź impulsową oraz charakterystykę częstotliwościową zaprojektowanego filtra. Przykładowa charakterystyka częstotliwościowa filtra z oknem prostokątnym i oknem Hamminga dla $N=15$, $\omega_1 = \pi/8$, $\omega_2 = \pi/2$, poniżej.

Uwaga: do realizacji tego zadania można wykorzystać wynik zadania 2.

$$h_{BS}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{BS}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$h_{BS}^W(n) = w(n) h_{BS}(n)$$



Z6. Korzystając z funkcji: *fir1* oraz *kaiserord* i *kaiser* pakietu Matlab zaprojektować następujące filtry z oknem Kaisera:

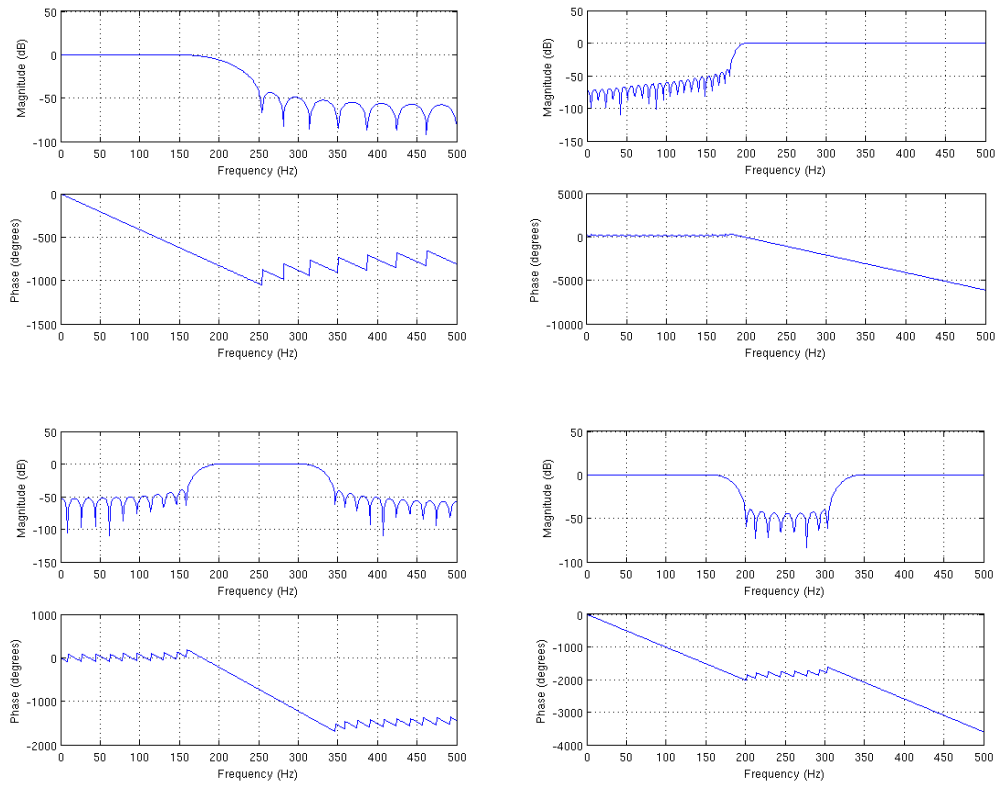
a) dolnoprzepustowy: pasmo przenoszenia do 150 Hz, nierównomierność w paśmie przenoszenia poniżej 0.05, minimalne tłumienie w paśmie zaporowym 40dB dla 250 Hz, częstotliwości próbkowania $f_p = 1000\text{Hz}$;

b) górnoprzepustowy: częstotliwość graniczna pasma przenoszenia $f_g = 180$ Hz, nierównomierność w paśmie przenoszenia poniżej 0.05, minimalne tłumienie w paśmie zaporowym 40dB dla 200 Hz, częstotliwości próbkowania $f_p = 1000\text{Hz}$;

c) pasmowo-przepustowy: zakres częstotliwości pasma przepustowego 200 Hz do 300 Hz, nierównomierność 0.05, częstotliwości pasma zaporowego to: 160 Hz i 350 Hz. Minimalne tłumienie dla podanych częstotliwości to 40dB;

d) pasmowo-zaporowy: zakres częstotliwości pasma zaporowego 200 Hz do 300 Hz. Minimalne tłumienie dla podanych częstotliwości to 40dB. Granice pasma przepustowego to: 160 Hz i 350 Hz. Nierównomierność ch-ki częstotliwościowej w paśmie przepustowym to 0.05;

Narysować charakterystyki częstotliwościowe uzyskanych filtrów. Sprawdzić, czy zaprojektowane filtry spełniają wymagania projektowe.



Z7. Sprawdzić numerycznie podaną zależność

$$H_w(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)w(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega})W(e^{j(\omega-\Omega)})d\Omega$$

Zależność ta wiąże widmo filtra o odpowiedzi impulsowej $h(n)$ obciętej oknem $w(n)$ z widmem filtra idealnego (nie obciętego) i widmem okna.

