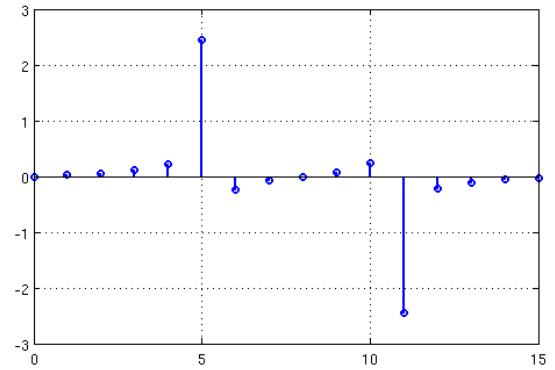
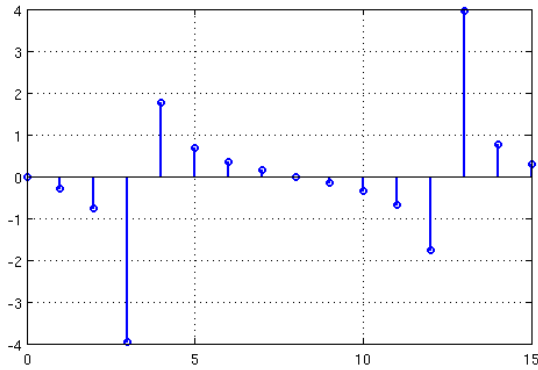
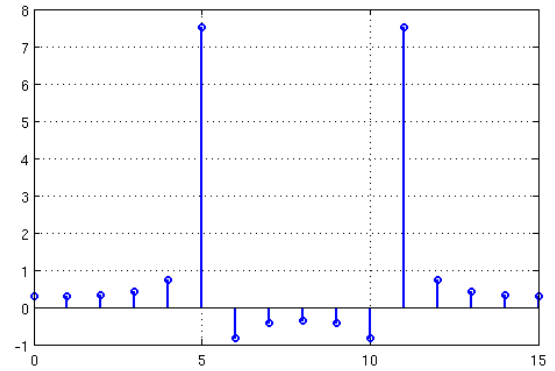
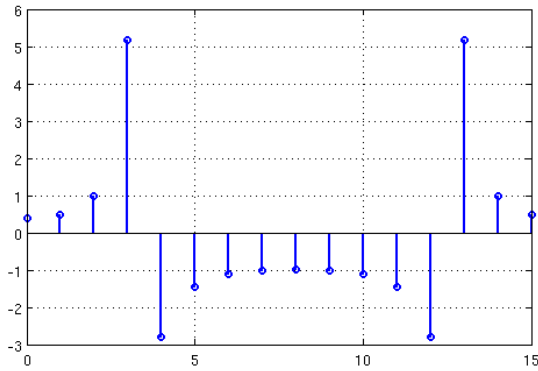


Efektywne wyznaczanie dyskretnej transformacji Fouriera (DFT) dla sygnałów rzeczywistych

Transformacja DFT może być efektywnie wyznaczana przy użyciu procedury FFT. Jednak dla **sygnałów rzeczywistych** można złożoność obliczeniową obniżyć jeszcze dodatkowo o ok. 50%, korzystając z następującej własności DFT (FFT):

$$X(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right)^{**} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right)^* = X^*(k)$$



$\sin(2\pi/16 \cdot 3.3 \cdot [0:15])$

$\sin(2\pi/16 \cdot 5.1 \cdot [0:15])$

1) Wyznaczanie transformacji dwóch sygnałów rzeczywistych za pomocą jednej operacji DFT

Z dwóch sygnałów rzeczywistych $x(n)$ i $y(n)$ budujemy sygnał zespolony

$$z(n) = x(n) + j y(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

i wyznaczamy jego widmo $Z(k)$ równe

$$Z(k) = X(k) + j Y(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Dla widm $X(k)$ i $Y(k)$ jako widm sygnałów rzeczywistych obowiązują zależności

$$X(N-k) = X^*(k), \quad Y(N-k) = Y^*(k)$$

Korzystając z nich mamy

$$Z(k) + Z(N-k) = X(k) + X(N-k) + j[Y(k) + Y(N-k)]$$

$$Z(k) + Z(N-k) = X(k) + X^*(k) + j[Y(k) + Y^*(k)]$$

$$Z(k) + Z(N-k) = 2 \Re \{X(k)\} + j 2 \Re \{Y(k)\}$$

Z tąd mamy

$$\Re \{X(k)\} = \frac{1}{2} \Re \{Z(k) + Z(N-k)\}, \quad \Re \{Y(k)\} = \frac{1}{2} \Im \{Z(k) + Z(N-k)\}$$

Podobnie

$$\begin{aligned} Z(k) - Z(N-k) &= X(k) - X^*(k) + j[Y(k) - Y^*(k)] \\ Z(k) - Z(N-k) &= 2j \Im \{X(k)\} - 2 \Im \{Y(k)\} \end{aligned}$$

Z tąd mamy

$$\begin{aligned} \Im \{X(k)\} &= \frac{1}{2} \Im \{Z(k) - Z(N-k)\} \\ \Im \{Y(k)\} &= \frac{-1}{2} \Re \{Z(k) - Z(N-k)\} \end{aligned}$$

2) wyznaczanie transformacji N-punktowego sygnału rzeczywistego za pomocą jednej N/2 punktowej operacji DFT

Policzmy osobno transformację dla próbek parzystych i nieparzystych, tj.

$$\begin{aligned} X_N(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) e^{-j \frac{2\pi}{N} k 2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) e^{-j \frac{2\pi}{N} k (2n+1)} \\ X_N(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) e^{-j \frac{2\pi}{N/2} kn} + e^{-j \frac{2\pi}{N} k N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) e^{-j \frac{2\pi}{N/2} kn} = X_{N/2}^E(k) + e^{-j \frac{2\pi}{N} k} X_{N/2}^O(k) \end{aligned}$$

W powyższym wzorze $k=0,1,\dots,N-1$. By z niego korzystać potrzebujemy wyznaczać $X_{N/2}^E(k)$ i $X_{N/2}^O(k)$ dla $k=0,1,\dots,N-1$, co wydaje się raczej zwiększać złożoność obliczeniową niż ją zmniejszać. Zauważmy, jednak że okres widm $X_{N/2}^E(k)$ i $X_{N/2}^O(k)$ wynosi $N/2$, co oznacza, że wyznaczać je tylko dla $k=0,1,\dots,N/2-1$

$$\begin{aligned} X_{N/2}^E(k+N/2) &= X_{N/2}^E(k), \quad k=0,1,\dots,N/2-1 \\ X_{N/2}^O(k+N/2) &= X_{N/2}^O(k), \quad k=0,1,\dots,N/2-1 \end{aligned}$$

Jak widać transformację N-punktową można otrzymać z odpowiedniego zestawienia wyników transformacji N/2-punktowych. Transformacje DFT dwóch sygnałów rzeczywistych mających po N/2 próbek można wyznaczyć przy pomocy jednego N/2 punktowego DFT tak jak to pokazano w p. 1.

Zadanie

- 1) Napisać program wyznaczający widmo dwóch sygnałów rzeczywistego wg metody 1.
 - a) korzystając z funkcji *randn* wygenerować dwa sygnały $x(n)$ i $y(n)$ po N próbek oraz wyznaczyć ich widma $X(k)$ i $Y(k)$
 - b) zbudować nowy sygnał $z(n) = x(n) + j y(n)$, $n=0,1,\dots,N-1$ i wyznaczyć jego widmo $Z(k)$
 - c) korzystając z zależności

$$\begin{aligned} \Re \{X(k)\} &= \frac{1}{2} \Re \{Z(k) + Z(N-k)\}, \quad \Re \{Y(k)\} = \frac{1}{2} \Im \{Z(k) + Z(N-k)\} \\ \Im \{X(k)\} &= \frac{1}{2} \Im \{Z(k) - Z(N-k)\}, \quad \Im \{Y(k)\} = \frac{-1}{2} \Re \{Z(k) - Z(N-k)\} \\ X(k) &= \Re \{X(k)\} + j \Im \{X(k)\} \\ Y(k) &= \Re \{Y(k)\} + j \Im \{Y(k)\} \end{aligned}$$

wyznaczyć części rzeczywistą i urojoną widm sygnałów $x(n)$ i $y(n)$. Sprawdzić, że otrzymane w ten sposób widma są identyczne z widmami wyznaczonymi w punkcie (a).

- 2) Napisać program wyznaczający widmo jednego sygnałów rzeczywistego o długości N przy użyciu algorytmu N/2-punktowego DFT wg metody 2.
 - a) korzystając z funkcji *randn* wygenerować sygnały $x(n)$ mający N próbek i wyznaczyć jego widmo $X(k)$

b) zbudować dwa nowe sygnały $x^E(n) = x(2n)$ oraz $x^O(n) = x(2n+1)$, $n=0,1,\dots,N/2-1$ i wyznaczyć ich widma $X^E(k)$ i $X^O(k)$ korzystając z wyniku zadania (1).

c) korzystając z zależności

$$X(k) = X^E(k) + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} X^O(k)$$

i pamiętając, że widma $X^E(k)$ i $X^O(k)$ mają okres $N/2$, wyznaczyć widmo sygnału $x(n)$ i porównać z wynikiem z punktu (a).