

3) Szereg Fouriera

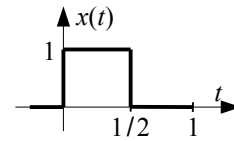
1. Narysować kilka funkcji z podanych zbiorów i wyznaczyć ich iloczyny skalarne

$$\text{Zbiór 1. } \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T} nt, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi}{T} nt : n=1,2,\dots \right\}$$

$$\text{Zbiór 2. } \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T} nt} : n=0,\pm 1,\pm 2,\dots \right\}$$

2. Dany jest szereg Fouriera reprezentujący sygnał ciągu impulsów prostokątnych (patrz rys):

$$x(t) \approx \sum_{n=-N}^N X_n e^{j\frac{2\pi}{T} nt}, \quad X_n = \begin{cases} 1/2, & n=0 \\ \frac{(-1)^n - 1}{-j2\pi n}, & n \neq 0 \end{cases},$$



Napisać program, który wyznaczy sygnał $x(t)$ dla kilku wybranych wartości N (patrz przykładowe rysunki). Sygnał wyznaczyć dla t z następujących przedziałów: $t=[0; T]$, $t=[-T; T]$, $t=[-T/2; T]$. Zaobserwować własność okresowości rekonstruowanego sygnału, a także efekt Gibbsa. Sprawdzić jak zachowuje się błąd aproksymacji w funkcji N określony poniższym wzorem:

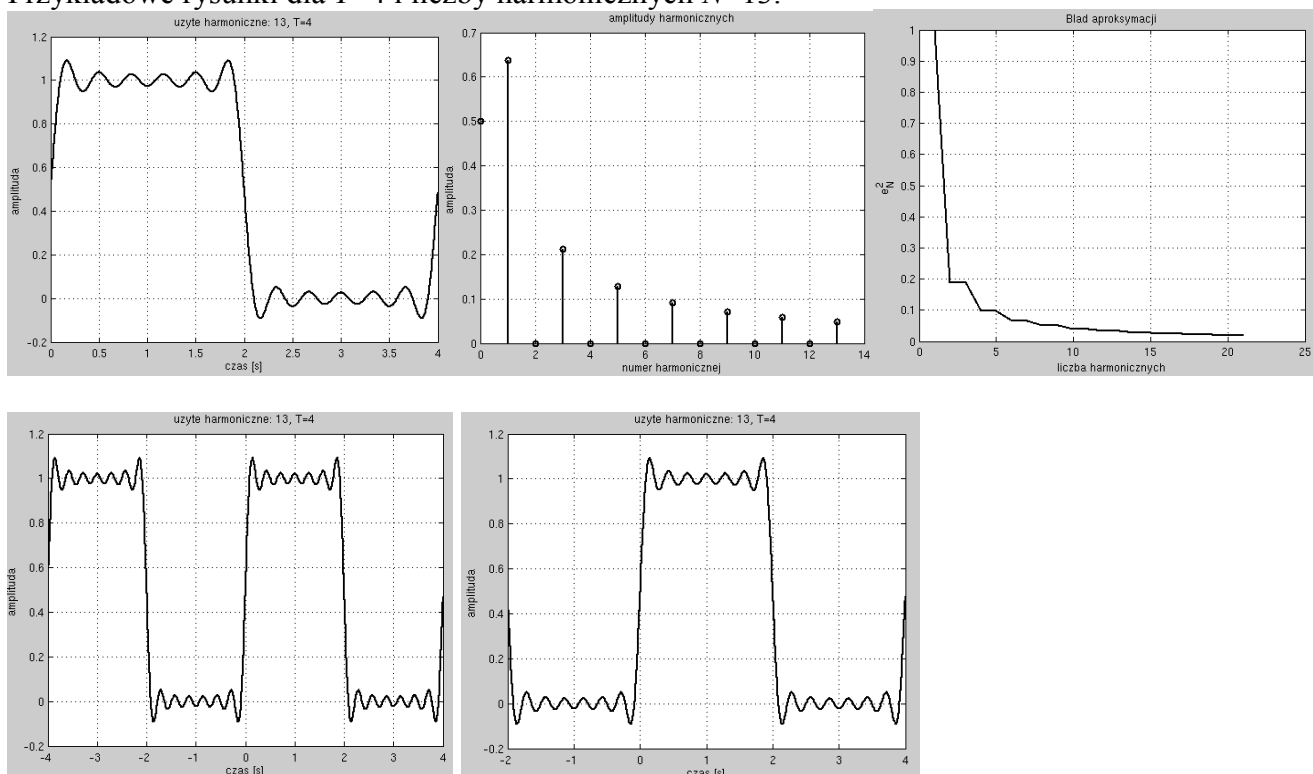
$$e_N^2 = \int_0^T \left| x(t) - \sum_{n=-N}^N X_n e^{j\omega_0 nt} \right|^2 dt = \int_0^T |x(t)|^2 dt - T \sum_{n=-N}^N |X_n|^2$$

Uwaga. Ponieważ $X_n = -X_{-n}$ powyższy szereg można również zapisać w postaci

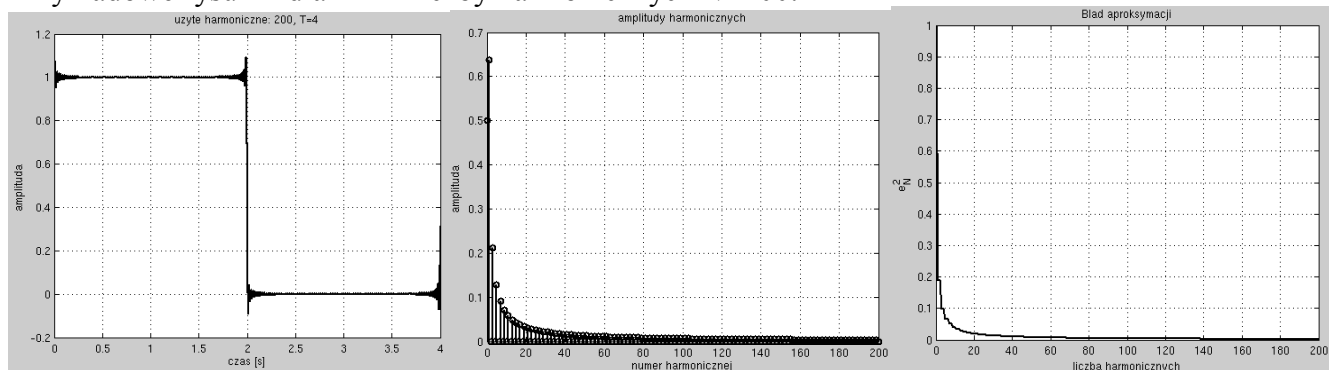
$$x(t) \approx \sum_{n=-N}^N X_n e^{j\frac{2\pi}{T} nt} = X_0 + \sum_{n=1}^N X_n (e^{j\frac{2\pi}{T} nt} - e^{-j\frac{2\pi}{T} nt}) = X_0 + \sum_{n=1}^N 2j X_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right), \text{ gdzie}$$

X_0 jest składową stałą sygnału, zaś $2j X_n$ jest amplitudą n -tej harmonicznej.

Przykładowe rysunki dla $T=4$ i liczby harmonicznych $N=13$.

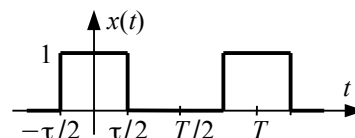


Przykładowe rysunki dla $T=4$ i liczby harmonicznych $N=200$.

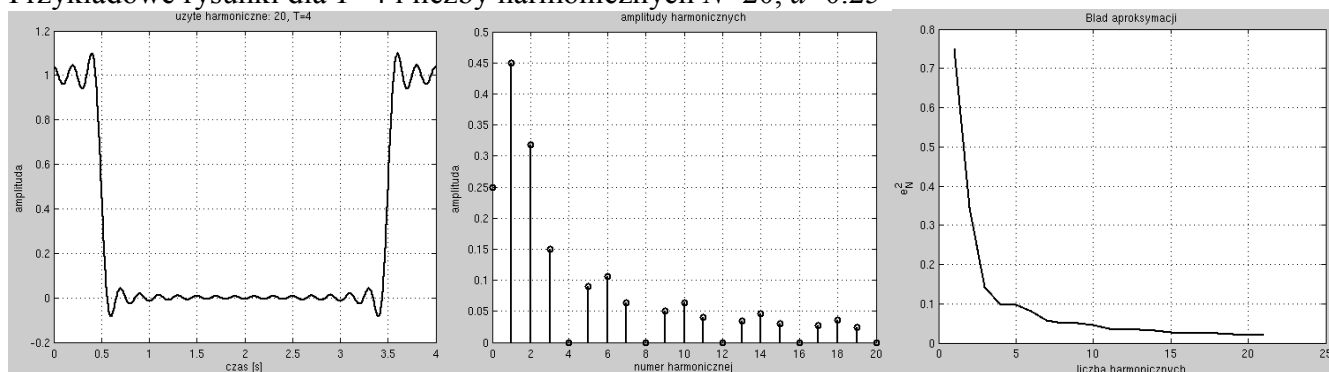


3. Korzystając ze wzoru (a) wyznaczyć współczynniki zespolonego szeregu Fouriera (b) reprezentujący niżej przedstawiony sygnał prostokątny o współczynniku wypełnienia $d=\tau/T$. Napisać program wyznaczający (rekonstruujący) przebieg czasowy sygnału $x(t)$ dla $t=[0; T]$, $t=[-T; T]$, $t=[-T/2; T]$. Przyjąć współczynnik wypełnienia (d) równy 25%. Zaobserwować zachowanie się modułów współczynników Fouriera (a), zwłaszcza tych związanych z wyższymi harmonicznymi, w funkcji zmiany współczynnika wypełnienia (d).

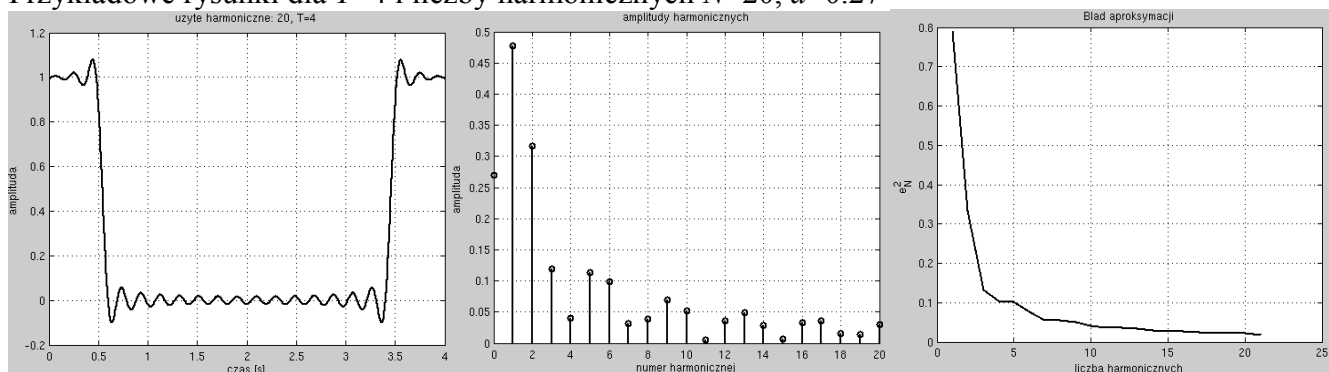
$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 e^{-j\omega_0 n t} dt \quad (a) \quad x(t) \approx \sum_{n=-N}^N X_n e^{j \frac{2\pi}{T} n t}, \quad (b)$$



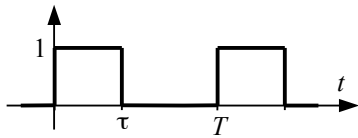
Przykładowe rysunki dla $T=4$ i liczby harmonicznych $N=20$, $d=0.25$



Przykładowe rysunki dla $T=4$ i liczby harmonicznych $N=20$, $d=0.27$



4. Sprawdzić (analitycznie), że niżej podane szeregi Fouriera (a) i (b) odpowiadają przebiegowi prostokątnemu pokazanemu na poniższym rysunku:



$$\tau/T = d,$$

Napisać program, który wyznaczy sygnał $x(t)$ dla $d = 0.25$ oraz kilku wybranych wartości N . Sprawdzić nierówność Bessela dla obu szeregów (a) i (b).

$$x(t) = d + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{2}{n} \sin(\omega_0 n \tau / 2) \cos(\omega_0 n t - \omega_0 n \tau / 2) \quad (a)$$

$$x(t) = d + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} [\sin \omega_0 n \tau \cos \omega_0 n t - [\cos \omega_0 n \tau - 1] \sin \omega_0 n t] \quad (b)$$

Dla przypomnienia niżej podano nierówność Bessela wraz z odpowiadającą jej szeregiem Fouriera.

$$\int_a^b |x(t)|^2 dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \|\phi_k(t)\|^2, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(t) \quad (c)$$

5. Wyznaczyć współczynniki zespolonego szeregu Fouriera reprezentującego sygnał trójkątny o zerowej składowej stałej. W zadaniu należy skorzystać z wyników zadania 2 (dla przebiegu prostokątnego z zerową składową DC, tj. $X_0 = 0$) oraz faktu, że sygnał trójkątny jest całką sygnału prostokątnego.

Rozwiniecie w szereg Fouriera sygnału prostokątnego bez składowej stałej, o wypełnieniu 50 %, którego jeden okres:

$$x^\Pi(t) = \begin{cases} 1/2, & 0 < t < T/2 \\ -1/2, & T/2 < t < T \end{cases}$$

dane jest wzorem:

$$x^\Pi(t) = \sum_n X_n^\Pi e^{j\omega_0 n t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad X_n^\Pi = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \frac{(-1)^n - 1}{-j2\pi n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

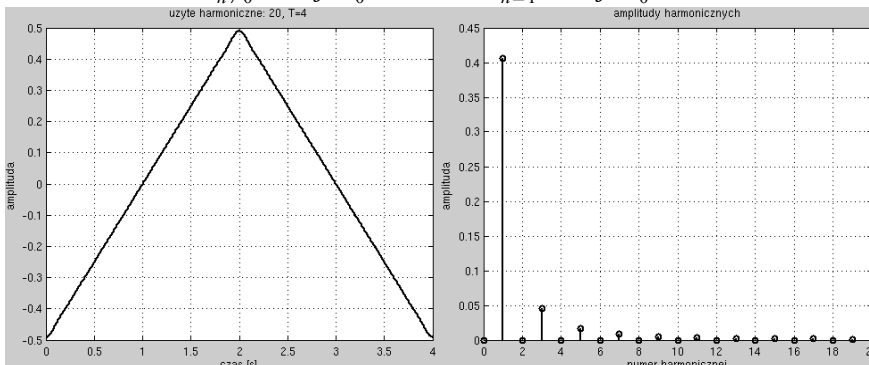
Całkując $x^\Pi(t)$ w przedziale od 0 do $t < T$ otrzymujemy:

$$x^\Delta(t) = \int_0^t x^\Pi(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{n \neq 0} X_n^\Pi e^{j\omega_0 n \tau} d\tau = \sum_{n \neq 0} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n} (e^{j\omega_0 n t} - 1)$$

$$x^\Delta(t) = -\sum_{n \neq 0} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n} + \sum_{n \neq 0} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 n t}$$

Pierwszy czynnik w powyższym równaniu stanowi składową stałą. Pomijając ją otrzymujemy sygnał trójkątny o zerowej składowej stałej:

$$x_0^\Delta(t) = \sum_{n \neq 0} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 n t} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n} 2 \cos(\omega_0 n t)$$



Wyjaśnić dlaczego w powyższym szeregu pojawiły się funkcje kosinus, a dlaczego w szeregu reprezentującym przebieg prostokątny $x^\Pi(t)$ są funkcje sinus.