

Zestaw 1 - własności funkcji elementarnych

1. Naszkić wykres funkcji:

(a) $y = x^2(x + 3)(x - 4)(x - 7)^3$,

(b) $y = x^3 - 4x$,

(c) $y = -6x^3 + 18x$,

(d) $y = 2x^3 - 4x^2 - x$,

(e) $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 1$,

(f) $y = 4x^4 - 4x^2 + 1$.

2. Oblicz:

(a) $\log_5 5\sqrt{5}$,

(b) $\log_{\frac{1}{9}} 3^3\sqrt{3}$,

(c) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{4}} 8$,

(d) $3^{\log_3 5}$,

(e) $16^{\log_2 3}$.

3. Oblicz:

(a) $\arcsin 0$,

(b) $\arccos \frac{1}{2}$,

(c) $\arcsin 1$,

(d) $\arccos(-1)$,

(e) $\arctan 1$,

(f) $\text{arc ctg } \sqrt{3}$,

(g) $\text{arc ctg } 0$,

(h) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$,

(i) $\arcsin \frac{1}{2} - 4 \text{ arc ctg } 1 + 2 \arccos(-1)$,

(j) $\arctan(-1) + \arctan(1) + \arccos(-\frac{1}{2}) - 3 \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$,

4. Oblicz:

(a) $\arccos(-\frac{1}{2}) + \arctan(\tan \frac{9\pi}{5}) + \sin(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}) + \text{arcctg}(-1)$,

(b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \text{arcctg}(\text{ctg } \frac{8\pi}{7}) + \sin(\arcsin(-\frac{1}{2})) + \arctan(-1)$.

5. Narysuj wykresy funkcji:

(a) $y = 2^{-x}$,

(b) $y = |\tan x|$,

(c) $y = |\arcsin |x|| - 1$,

(d) $y = |\log|x+1|| - 2,$

(e) $y = 2^{|x-1|},$

(f) $y = \frac{\pi}{2} - |\arctan x|.$

6. Znajdź dziedzinę funkcji f :

(a) $f(x) = \sqrt{\sin x},$

(b) $f(x) = \log(1 - |x|),$

(c) $f(x) = \log_3 |\cos x|,$

(d) $f(x) = \arctan(\log_{x-2}(x + \sqrt{2x+1})),$

(e) $f(x) = \arcsin\left(\frac{4^x+3\cdot 2^x+2}{4^x-4}\right),$

(f) $f(x) = \log_x(2^x - 8),$

(g) $f(x) = \sqrt{\log \frac{1-x}{x+1}},$

(h) $f(x) = \log(\cos(\log x)),$

(i) $f(x) = \frac{2x-4}{x^2-5x+6} + \arcsin(3x-1),$

(j) $f(x) = \arccos(\log_{\frac{1}{3}} x),$

(k) $f(x) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan \sqrt{9-x^2},$

(l) $f(x) = \ln\left(\arcsin \frac{x-4}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{x-5}{3}},$

(m) $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2^x-1}}.$

7. Rozwiąż równania i nierówności:

(a) $\sqrt{x^2+x+1} = x,$

(b) $\sqrt{2+x-x^2} > x-1,$

(c) $2^{2^{|x+1|}} > \frac{1}{256},$

(d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} > \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x,$

(e) $\log \sqrt{x^2+5} - \log \sqrt{x+2} = \log \frac{3}{2},$

(f) $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2-5)] > 0,$

(g) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} > 3,$

(h) $x^{\log_2(x+2)+\log_2(x+3)} = \frac{1}{x}.$

8. Wyznacz szukane zbiory:

(a) $A \cap B = ?$ dla $A = \mathbb{D}_f$, $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $B = \mathbb{D}_g$, $g(x) = \log(1 - 2 \cos x),$

(b) $A \cap C = ?$, $B \setminus C = ?$, $A \cup B = ?$ dla $A = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(x+2) < 2\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{R} : \log_{0,5}(x+2) < 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} : \log_x(x+2) < 2\},$

(c) $A \cup B = ?$ $A \cap B = ?$ dla $A = \{x \in (-\pi, \pi) : \cos 4x = \sin(\frac{3}{2}\pi + 2x)\}$,
 $B = \{x \in (-\pi, \pi) : \frac{1}{\sin 2x} < \frac{2}{\sqrt{3}}\}.$

9. Zbadaj okresowość funkcji f , gdzie:

- (a) $f(x) = \sin^2 x$,
- (b) $f(x) = \sin x^2$,
- (c) $f(x) = c \cos x$,
- (d) $f(x) = \sin^2 x$,
- (e) $f(x) = 2 \sin(3x - 2)$,
- (f) $f(x) = 3 \cos 2x + 5 \sin 3x$.

10. Zbadaj monotoniczność funkcji f , gdzie:

- (a) $f(x) = x^3$,
- (b) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$,
- (c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$,
- (d) $f(x) = g(x) + h(x)$, gdzie g, h - funkcje rosnące.

11. Zbadaj parzystość:

- (a) funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$,
- (b) funkcji $f(x) = x^{\frac{2^x+1}{2^x-1}}$,
- (c) funkcji $f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$,
- (d) funkcji $f(x) = (x^3 + x) \sin x$,
- (e) funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$,
- (f) funkcji $f(x) = |\sin x|$,
- (g) funkcji $f(x) = \frac{\sin x}{x}$,
- (h) funkcji $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$,
- (i) funkcji $f(x) = \sin x \cos x$,
- (j) iloczynu dwóch funkcji parzystych,
- (k) iloczynu dwóch funkcji nieparzystych,
- (l) iloczynu funkcji parzystej i nieparzystej.

12. Narysuj wykres funkcji f , gdzie:

- (a) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$,
- (b) $f(x) = -3^{|x|} + 4$,
- (c) $f(x) = |2^{-x} - 1|$,
- (d) $f(x) = 4^{|x-1|+1}$,
- (e) $f(x) = \log_3 |x - 1|$,
- (f) $f(x) = |\log_2(x + 4)|$,
- (g) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$,
- (h) $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}} |x + 2| \right|$.

13. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają poniższe warunki:

- (a) $\log \frac{x-1}{2} - \log y = 0$,
- (b) $\log_2 \frac{xy}{2} - \log_2 x \cdot \log_2 y = 0$,
- (c) $\log y = \log(y + 2x) - \log x$,
- (d) $\log_2(x^2 + y) \leq 1$,
- (e) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + y^2) \geq -1$,
- (f) $\log_{x+1}(y - 4) < 1$,
- (g) $\log_y(\log_2(x + 2)) > 0$.

14. Korzystając z definicji sprawdzić czy dana funkcja f jest injekcją, suriekcją, bijekcją:

- (a) $f(x) = 3x + 5$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (b) $f(x) = e^x$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (c) $f(x) = e^x$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$,
- (d) $f(x) = \log_2 x$, gdzie $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
- (e) $f(x) = x^2$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (f) $f(x) = \frac{x}{x+2}$, gdzie $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (g) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (h) $f(x) = x^2 - 4x + 5$, gdzie $f : (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,
- (i) $f(x) = \frac{x}{2+x^2}$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (j) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, gdzie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$.

15. Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji:

- (a) $f(x) = x^3 + 1$,
- (b) $f(x) = 2 - \frac{2}{3}x$,
- (c) $f(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$,
- (d) $f(x) = (\log_2(x + 1))^3$,
- (e) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x + 2}$,
- (f) $f(x) = \log(x + 2)$,
- (g) $f(x) = 2 - \log_3(5x - 1)$.

16. Sprawdź czy funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest bijekcją. Jeżeli tak, to znajdź jej funkcję odwrotną:

- (a) $f(x) = \frac{x}{3x+5}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$,
- (b) $f(x) = x^2 - 2x$, $X = [1, +\infty)$, $Y = [-1, +\infty)$.

17. Udowodnij następujące tożsamości trygonometryczne (jeżeli to konieczne, to podaj odpowiednie założenia):

$$(a) \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$(b) \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} = \tan \frac{x}{2},$$

$$(c) \frac{1+2 \tan x - \tan^2 x}{\cos 2x + \sin 2x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(d) \frac{\sin x + \sin y}{\cos x - \cos y} = \cot \frac{y-x}{2},$$

18. Wyznaczyć funkcje $f \circ g$ i $g \circ f$, gdzie

$$(a) f(x) = (x-1)^2 - 1, g(x) = |x|,$$

$$(b) f(x) = 2^{3x+5}, g(x) = x^2,$$

$$(c) f(x) = \log(x^3 + 64), g(x) = x + 6.$$

19. Funkcję f przedstawić jako złożenie 2 lub 3 funkcji:

$$(a) f(x) = \sqrt{(2x+5)^3 + 1},$$

$$(b) f(x) = 2^{\log|x+5|},$$

$$(c) f(x) = \arccos(5\sqrt{\cos x} + 2),$$

$$(d) f(x) = (2x+1)^{(2x+1)},$$

$$(e) f(x) = \sin^3 x,$$

$$(f) f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{1+x^2}},$$

$$(g) f(x) = \ln(x^3 + 3).$$