

---

## KOŁOKWIUM 1 - Algebra, 20 listopada 2015

1. (24 pkt.) Na zbiorze  $\mathbb{C}$  wprowadzamy relację  $R$ , zdefiniowaną jako:

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow \max\{\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1\} > \max\{\operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2\}.$$

- (a) (7 pkt.) Pokazać, że  $(\mathbb{C}, R)$  jest zbiorem uporządkowanym. Stwierdzić czy jest to porządek silny czy słaby.
- (b) (3 pkt.) Czy  $(\mathbb{C}, R)$  jest uporządkowany liniowo?
- (c) (14 pkt.) W zbiorze  $A = \{-1 + 5i, 2 + i, 2 + 2i, -2 - 3i\}$  wskazać (jeżeli istnieją) elementy: minimalny, maksymalny, najmniejszy, największy, najdłuższy łańcuch. Ponadto wyznaczyć oraz narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór majorant i minorant zbioru  $A$  oraz jego kresy (o ile istnieją).

2. (23 pkt.) Niech  $A = (0, +\infty)$ . Niech działanie  $\circ$  w zbiorze  $A$  będzie określone następująco:

$$a \circ b = a^{\ln b}.$$

- (a) (9 pkt.) Pokazać, że struktura  $(A, \cdot, \circ)$  jest pierścieniem, gdzie  $\cdot$  oznacza zwykłe mnożenie liczb rzeczywistych.
- (b) (6 pkt.) Sprawdzić, czy  $(A, \cdot, \circ)$  jest pierścieniem całkowitym.
- (c) (8 pkt.) Wykazać, że odwzorowanie  $h : \mathbb{R} \rightarrow A$  określone wzorem

$$h(x) = e^x,$$

jest izomorfizmem pierścieni  $(\mathbb{R}, +, \circ)$  oraz  $(A, \cdot, \circ)$ .

3. (25 pkt.) Zilustrować na płaszczyźnie zespolonej zbiory

(a) (7 pkt.)

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg \left( \frac{-\sqrt{3} + i}{z + i - 2} \right) = \frac{13}{12} \pi \right\},$$

(b) (8 pkt.)

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z + e^{2 \ln 4 + i \frac{\pi}{3}}}{z + 4 + 2i} \right| \leq 1 \right\}.$$

(c) (10 pkt.)

$$C = \{ z \in \mathbb{C} : z^4 - (1 + i)^{80} = 0 \}.$$

4. (22 pkt.) Uzupełnić wykropkowane pola:

(a) (3 pkt.) Zbiór  $A = \{5k + 7 : k \in \mathbb{Z}\}$  nie jest elementem zbioru  $\mathbb{Z}/7$ , ponieważ

.....  
.....

(b) (2 pkt.) Relacja  $S$  określona na zbiorze  $\mathbb{R}$  jako  $xRy \Leftrightarrow xy > 0$ , nie jest relacją równoważności, ponieważ

.....  
.....

(c) (5 pkt.) Funkcja  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  określona niżej jest funkcją stałą w swojej dziedzinie,

$$f(z) = \frac{\overline{z^5 z z^2}}{4|z|^4}$$

ponieważ.....

.....

(d) (4 pkt.) Relacja  $S$  określona na zbiorze  $(0, +\infty)$  w następujący sposób:  $aSb \Leftrightarrow 2^a = 3^b$ , nie jest relacją porządku, ponieważ

.....  
.....

.....

(e) (2 pkt.) Funkcja  $h : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Q}, +, \cdot)$  określona wzorem  $h(x) = 2x$  nie jest homomorfizmem ciała  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  w siebie, ponieważ

.....  
.....

(f) (3 pkt.) Struktura  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \circ)$  z działaniem  $\circ$  określonym wzorem  $a \circ b = |ab|$  nie jest grupą abelową, ponieważ

.....  
.....

(g) (3 pkt.) Struktura  $(\mathbb{R}_+, \oplus, \circ)$  z działaniami  $\oplus, \circ$  określonymi wzorami  $a \oplus b = ab$  oraz  $a \circ b = a^b$  nie jest ciałem, ponieważ

.....  
.....