

## Arkusz 1a: Wyznaczenie parametrów rozkładu normalnego

Wzór funkcji gęstości rozkładu normalnego:

$$f(t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2s^2}\right)$$

Estymatory parametrów rozkładu normalnego:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - m)^2}$$

WYNIKI	m	s

<i>i</i>	<i>t<sub>i</sub></i>	<i>t<sub>i</sub> - m</i>	<i>(t<sub>i</sub> - m)<sup>2</sup></i>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
		$\sum_{i=1}^n (t_i - m)^2 =$	

*n* – liczba danych

*UWAGA: materiały proszę wydrukować dwustronnie, jeden zestaw na trzyosobowy zespół.*

*Na zajęcia należy przynieść KALKULATORY!*

## Arkusz 1b: Test zgodności W-Shapiro-Wilka dla rozkładu normalnego

1. Przyjąć poziom istotności i postawić hipotezę zerową:

$$\alpha = \dots\dots$$

$H_0$ : Rozkład danych jest zgodny z teoretycznym rozkładem normalnym na przyjętym poziomie istotności.

2. Obliczyć wartość  $l$ :

$$l = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ \frac{n-1}{2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

3. Wypełnić tabelę (wartości  $a_{n-j+1}$  zamieszczono w arkuszu 1c):

i	t <sub>i</sub>	t <sub>i</sub> <sup>2</sup>	j	a <sub>n-j+1</sub>	t <sub>n-j+1</sub> - t <sub>j</sub>	a <sub>n-j+1</sub> (t <sub>n-j+1</sub> - t <sub>j</sub> )
1	2	3	4	5	6	7
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11			10-l			
12			9			
13			8			
14			7			
15			6			
16			5			
17			4			
18			3			
19			2			
20			1			
$\varphi_2 = \sum_{i=1}^n t_i =$		$\varphi_3 = \sum_{i=1}^n t_i^2 =$		$\varphi_1 = \sum_{j=1}^l a_{n-j+1}(t_{n-j+1} - t_j) =$		

4. Obliczyć wartość statystyki testowej:

$$W = \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3 - \frac{1}{n}\varphi_2^2} = \dots\dots\dots$$

6. Sprawdzić hipotezę  $H_0$ :

$W \geq W_\alpha$	$H_0$
$W < W_\alpha$	$H_1$

5. Wyznaczyć wartość krytyczną statystyki testowej (arkusz 1c):

$W \dots\dots W_\alpha$       Hipoteza:  $\dots\dots\dots$

$$W_\alpha = \dots\dots\dots$$

7. Odczytać  $p$ -wartość (arkusz 1c):

$$p = \dots\dots\dots$$

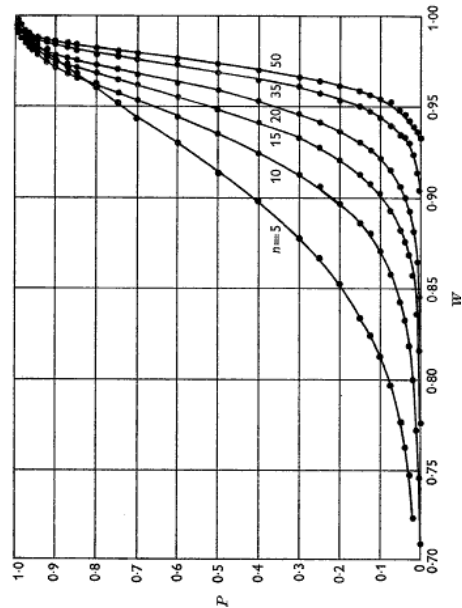
## Arkusz 1c: Test zgodności W-Shapiro-Wilka - tabele i wykresy

Tab. 1. Wartości współczynników  $a_{n-j+1}$  [PN-83/N-01052.07]

Indeks $j$	Liczność próbki $n$									
	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
1	0,481	0,473	0,464	0,459	0,454	0,449	0,445	0,441	0,437	
2	0,323	0,321	0,318	0,316	0,313	0,310	0,307	0,304	0,302	
3	0,256	0,256	0,258	0,257	0,256	0,255	0,254	0,253	0,252	
4	0,206	0,208	0,212	0,213	0,214	0,214	0,215	0,215	0,215	
5	0,164	0,169	0,174	0,176	0,179	0,181	0,182	0,184	0,185	
6	0,127	0,133	0,140	0,144	0,148	0,151	0,154	0,156	0,158	
7	0,093	0,101	0,109	0,115	0,120	0,124	0,128	0,132	0,135	
8	0,061	0,071	0,080	0,088	0,094	0,100	0,105	0,109	0,113	
9	0,030	0,042	0,053	0,062	0,070	0,076	0,082	0,088	0,092	
10		0,014	0,026	0,037	0,046	0,054	0,061	0,067	0,073	
11				0,012	0,023	0,032	0,040	0,048	0,054	
12						0,011	0,020	0,028	0,036	
13								0,009	0,018	

Tab. 2. Wartości krytyczne  $W_\alpha$  [PN-83/N-01052.07]

Liczność próbki $n$	Poziom istotności $\alpha$		
	0,10	0,05	0,01
3	0,789	0,767	0,653
4	0,792	0,748	0,667
5	0,806	0,762	0,686
6	0,826	0,788	0,713
7	0,838	0,803	0,730
8	0,851	0,818	0,749
9	0,859	0,829	0,764
10	0,869	0,842	0,781
11	0,876	0,850	0,792
12	0,883	0,859	0,805
13	0,889	0,866	0,814
14	0,895	0,874	0,825
15	0,901	0,881	0,835
16	0,906	0,887	0,844
17	0,910	0,892	0,851
18	0,914	0,897	0,858
19	0,917	0,901	0,863
20	0,920	0,905	0,868
21	0,923	0,908	0,873
22	0,926	0,911	0,878



Rys. 1. Dystrybuanty statystyki W-Shapiro-Wilka dla różnych licznosci próby [Shapiro S. S., Wilk M. B.: An analysis of variance test for normality. Biometrika(1965), 52, 3 and 4, p. 591]

## Arkusz 1d: Wykres dystrybuanty rozkładów: normalnego i Weibulla

Tab. 3. Dystrybuanta rozkładu normalnego standaryzowanego  $N(0,1)$  [Fokin J. G.: Niezawodność eksploatacyjna urządzeń technicznych. Wydawnictwo ministerstwa obrony narodowej, Warszawa 1973]

$z$	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0,1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571434	.575345
0,2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0,3	.617911	.621720	.625516	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0,4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0,5	.691462	.694974	.698468	.702044	.705502	.708940	.712260	.715561	.718843	.722105
0,6	.725374	.729069	.732711	.736353	.739891	.743415	.746873	.750273	.753614	.756893
0,7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0,8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0,9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1,0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1,1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1,2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1,3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1,4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889
1,5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1,6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486
1,7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1,8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1,9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976704
2,0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2,1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2,2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2,3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2,4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2,5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2,6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2,7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2,8	.997445	.997523	.997593	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2,9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3,0	.998650	.998695	.998733	.998751	.998763	.998767	.998781	.998789	.998793	.998793

Standaryzacja:

$$x = \frac{m-t}{s} ; t \leq m$$

$$F(x) = 1 - F_{z\text{ tabeli}}$$

$$x = \frac{t-m}{s} ; t > m$$

$$F(x) = F_{z\text{ tabeli}}$$

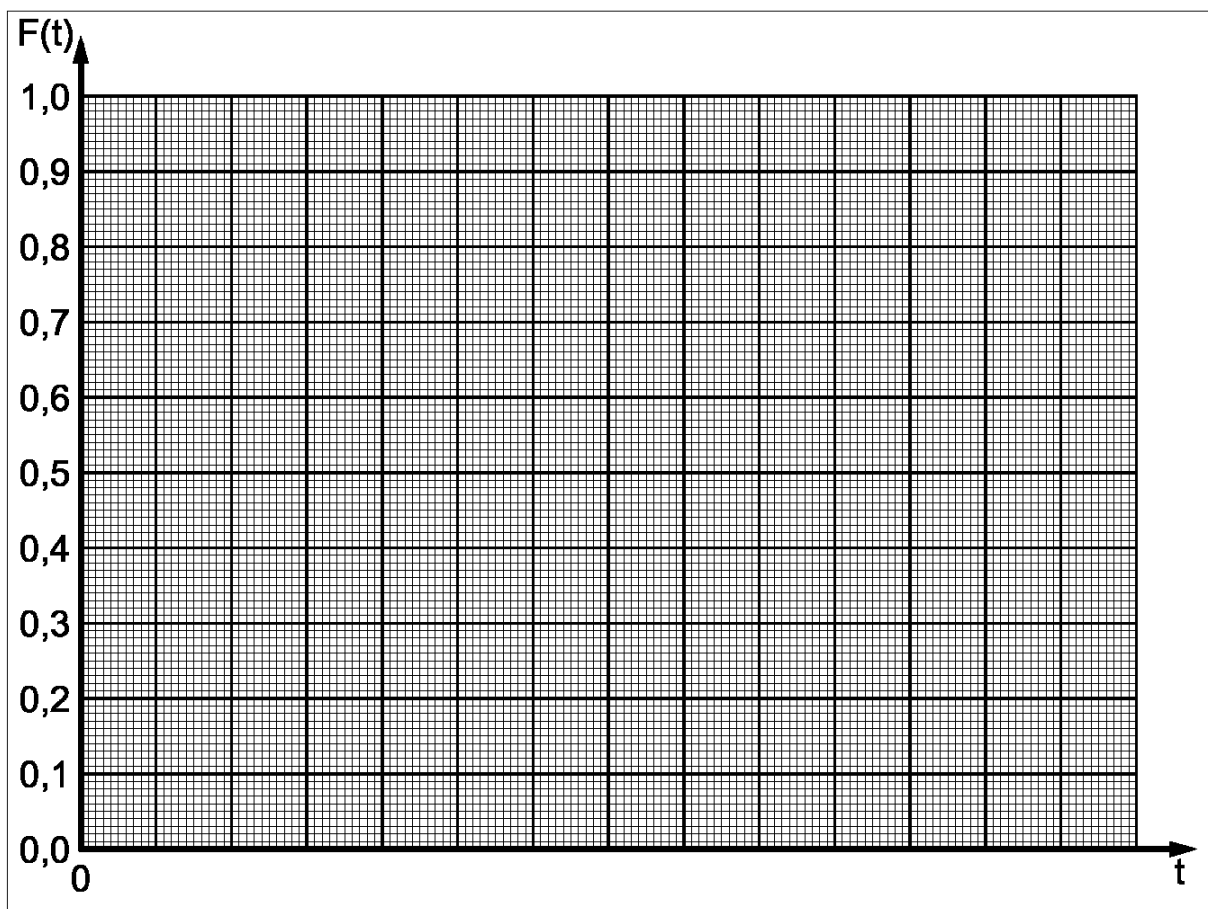
Przykład:

$m = 20, \quad s = 5$   
 $t_1 = 10, \quad t_2 = 25$

$$x_1 = \frac{20-10}{5} = 2$$

$$F(x_1) = 1 - 0,977250 = 0,02275$$

$$x_2 = \frac{25-20}{5} = 1$$

$$F(x_2) = 0,841345$$


Rys. 3. Wykres dystrybuanty rozkładów: normalnego i Weibulla

## Arkusz 2a: Wyznaczenie parametrów rozkładu Weibulla

Wzór funkcji gęstości rozkładu Weibulla:

$f_I(t) = \frac{\delta}{\theta} t^{\delta-1} \exp\left(-\frac{t^\delta}{\theta}\right)$	$f_{II}(t) = \nu \lambda^\nu t^{\nu-1} \exp(-(\lambda t)^\nu)$	$f_{III}(t) = \frac{b}{a^b} t^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right)$
---	--	---

W celu wyznaczenia wartości parametrów rozkładu Weibulla (dla funkcji gęstości  $f_I(t)$ ) można skorzystać z metodyki podanej w: *Piec P., Badania eksploatacyjne elementów i zespołów pojazdów szynowych.* Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2004.

$$h(t_i) = \frac{i - 0,5}{n}$$

$$\delta \left[ \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \ln(t_i) \right] - \frac{n}{2} \ln(\theta) = \left[ \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-h(t_i)}\right)\right) \right] \quad \rightarrow \delta[A] - \frac{n}{2} \ln(\theta) = [B]$$

$$\delta \left[ \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \ln(t_i) \right] - \left(n - \frac{n}{2}\right) \ln(\theta) = \left[ \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-h(t_i)}\right)\right) \right] \quad \rightarrow \delta[C] - \left(n - \frac{n}{2}\right) \ln(\theta) = [D]$$

i	t <sub>i</sub>	ln(t <sub>i</sub> )	∑ ln(t <sub>i</sub> )	h(t <sub>i</sub> )	1/(1-h(t <sub>i</sub> ))	ln(1/(1-h(t <sub>i</sub> )))	ln(ln(1/(1-h(t <sub>i</sub> ))))	∑ ln(ln(1/(1-h(t <sub>i</sub> ))))	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
A									B
			∑ <sub>i=1</sub> <sup>10</sup> ( )					∑ <sub>i=1</sub> <sup>10</sup> ( )	
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
C									D
			∑ <sub>i=11</sub> <sup>20</sup> ( )					∑ <sub>i=11</sub> <sup>20</sup> ( )	

WYNIKI	f <sub>I</sub> (t)		f <sub>II</sub> (t)		f <sub>III</sub> (t)	
	θ	δ	λ = 1/δ√θ	ν = δ	a = δ√θ	b = δ

## Arkusz 2b: Test zgodności $\lambda$ -Kolmogorowa dla rozkładu Weibulla

1. Przyjąć poziom istotności i postawić hipotezę zerową:

$$\alpha = \dots\dots$$

$H_0$ : Rozkład danych jest zgodny z teoretycznym rozkładem Weibulla na przyjętym poziomie istotności.

2. Dystrybuanta teoretyczna rozkładu Weibulla:

$$F_i(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^\delta}{\theta}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{t^{\dots\dots}}{\dots\dots}\right)$$

3. Dystrybuanta empiryczna rozkładu Weibulla:

$$\hat{F}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_1 \\ \frac{i}{n}, & t_i < t \leq t_{(i+1)} \quad (i=1,2,\dots,n-1) \\ 1, & t > t_n \end{cases}$$

$i$	$t_i$	$\hat{F}(t) = \frac{i}{n}$	$F_i(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^{\dots\dots}}{\dots\dots}\right)$	$ \hat{F}(t) - F(t) $
1	2	3	4	5
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

4. Wartość statystyki testowej:

$$D = \sup_t |\hat{F}(t) - F(t)| = \dots\dots\dots$$

$$\lambda = D\sqrt{n} = \dots\dots\dots$$

5. Wyznaczyć wartość krytyczną statystyki testowej:

$\alpha$	0,10	0,05	0,01
$\lambda_\alpha$	1,224	1,358	1,627

$$\lambda_\alpha = \dots\dots\dots$$

6. Sprawdzić hipotezę  $H_0$ :

$\lambda \leq \lambda_\alpha$	$H_0$
$\lambda > \lambda_\alpha$	$H_I$

$\lambda \dots\dots \lambda_\alpha$  Hipoteza:  $\dots\dots\dots$

7. Odczytać  $p$ -wartości z rysunku obok:

$$p = \dots\dots\dots$$

