Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Tomasz Chwiej

4 marca 2021

Macierz A jest macierzą kwadratową o liczbie wierszy/kolumn równej 4. Elementy macierzy zdefiniowane są następująco:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j+\delta} \tag{1}$$

gdzie: $\delta = 0$ dla NR , $\delta = 2$ dla GSL. Zadania do wykonania:

1. Znaleźć rozkład LU macierzy A przy użyciu procedury (NR lub GSL do wyboru):

   - **ludcmp(float A[n][n], int n, int indx[n], float &d)**,
     gdzie: A - macierz, n - rozmiar macierzy, indx - wektor permutacji wierszy, d - określa liczbę permutacji
     Uwagi:
     – wektora *indx* oraz zmiennej d nie inicjujemy
     – po wykonaniu rozkładu procedura nadpisze macierz A rozkładem LU
   - **int gsl_linalg_LU_decomp(gsl_matrix *a, gsl_permutation *p, int *signum)**
     gdzie: A - macierz układu, p - wektor permutacji wierszy, signum - określa parzystą lub nieparzystą liczbę permutacji. Macierz A zostaje nadpisana macierzami: L (dolna trójkątna - poniżej diagonali) oraz U (górna trójkątna + diagonala).

2. Zapisać do pliku: elementy diagonalne macierzy U oraz wyznacznik macierzy A (iloczyn elementów diagonalnych U)

3. Znaleźć macierz odwrotną A^{-1} rozwiązując n układów równań z wektorami wyrazów wolnych:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

   Z definicji $A \cdot A^{-1} = I$, gdzie: I to macierz jednostkowa, więc rozwiązując n-układów równań $A \cdot \vec{x}_j = \vec{b}_j$ dostaniemy $X = [\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}] = A^{-1}$ (indeksowanie od 0 tylko dla GSL).

   Do rozwiązania układu proszę wykorzystać procedurę (jak poprzednio **NR** lub **GSL**):

   - **lubksb(float LU[n][n],int n, int indx[n], float b[n])**
     gdzie: LU - to rozkład LU (wpisany do macierzy A), b - aktualny wektor wyrazów wolnych
   - **int gsl_linalg_LU_solve(gsl_matrix *A, gsl_permutation *p, gsl_vector *b, gsl_vector *x)**
     gdzie: **b** to wektor wyrazów wolnych a **x** to wektor rozwiązań.

   Macierz odwrotną zapisać do pliku

4. Obliczyć iloczyn AA^{-1} i zapisać do pliku. Element macierzowy dla iloczynu macierzy

$$C = A \cdot B \tag{3}$$

obliczamy następująco:

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j} \tag{4}$$

Czyli jest on **iloczynem skalarnym** $i - tego$ wiersza A oraz $j - tej$ kolumny B. Wszystkie elementy otrzymamy przechodząc po każdym elemencie macierzy C:

```
for(i=0;i<=n;i++){
    for(j=0;j<=n;j++){

            C[i][j]=0.; //zerujemy komorke w ktorej zapiszemy wartosc

            for(k=0;k<=n;k++)C[i][j]+=A[i][k]*B[k][j]; //iloczyn skalarny

    }
}
```

5. Obliczyć wskaźnik uwarunkowania macierzy $cond = \|A\|_{\alpha,\beta} \cdot \|A^{-1}\|_{\alpha,\beta}$ korzystając z normy

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \tag{5}$$

i zapisać do pliku.

6. W sprawozdaniu proszę przedyskutować wyniki: 1) wpływ elementów diagonalnych macierzy U na wyznacznik A, 2) wielkość wskaźnika uwarunkowania macierzy A i powiązać go z wynikiem iloczynu AA^{-1}