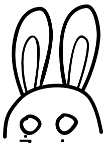
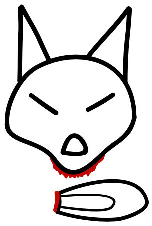


Przewidywanie przyszłości

Życie na ziemi jest piękne. Wręcz cudowne! A złożoność niektórych relacji od setek lat zadziwia i inspiruje artystów i naukowców. Popatrzcie sami na beztrosko kicające po łące króliczki. Jedzą trawę i robią to co króliczki robią najlepiej. A obok nich żyją słodkie liski. Bawią się, figlują, a gdy są głodne polują i pożerają smaczne i tłuste króliczki. A jeżeli nie uda im się nic upolować to giną zostając pożywką dla zawsze żarłocznych bakterii. Nad tym problemem zastanawiał się już w 1926 roku Vito Volterra, a sześć lat wcześniej Alfred Lotka. Na jego nieszczęście Lotka opisywał problem na przykładzie reakcji chemicznych, dlatego musiał ustąpić swojemu włoskiemu koledze pierwszeństwo w nazwie. Równania do których doszli obaj badacze przyjmują postać:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = aK - bKL$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = cKL - dL$$



gdzie *K* i *L* są liczbami opisującymi populację króliczków i lisków (np. ilość osobników na powierzchnię) a parametry *a, b, c* i *d* to dodatkowe parametry liczbowe.

Interpretacja tego równania jest dość prosta. Lewa strona opisuje szybkość zmiany populacji króliczków bądź lisków. Gdyby nie było lisów, to króliki mnożyłyby się ekspotencjalnie, (jak to króliki), szybkość przyrostu ich populacji jest wprost proporcjonalna do jej wielkości, *aK*. Natomiast im więcej królików lub lisów, tym bardziej rośnie prawdopodobieństwo złapania go i przerobienia na wczesny obiad, *bKL*. Bardzo podobnie należy interpretować prawą stroną drugiego równania. Natomiast rozwiązanie tego układu równań stanowi już dużo poważniejsze wyzwanie i nie będziemy w stanie zrobić go tak z marszu. Nim dojdziemy do tego etapu musimy zająć się, dużo prostszymi przykładami i zapoznać z kilkoma terminami matematycznymi.

Problem początkowy Cauchego

PPC stanowi podstawę rozwiązywania równań różniczkowych. A mianowicie jest to minimalna ilość danych jakie musimy posiadać aby rozwiązać dane zagadnienie. Na początku matematycznie: Jeżeli interesuje nas funkcja $f(x)$, ale znamy tylko wartość jej pochodnej np. $f'(x) = 2x$, możemy scałkować daną pochodną, tylko w takim przypadku otrzymamy wiele funkcji: $f(x) = x^2 + C$. Aby pozbyć się niewiadomej *C*, musimy znać jedną wartość funkcji *f*. Stąd ogólny wygląd PPC:

$$\begin{cases} f'(x, y) = coś \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Jeżeli będziemy znać drugą pochodną naszego równania sprawa wygląda dość podobnie, tylko musimy iść o krok dalej:

$$\begin{cases} f''(x, y, f') = coś \\ f'(x_0) = f_0' \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

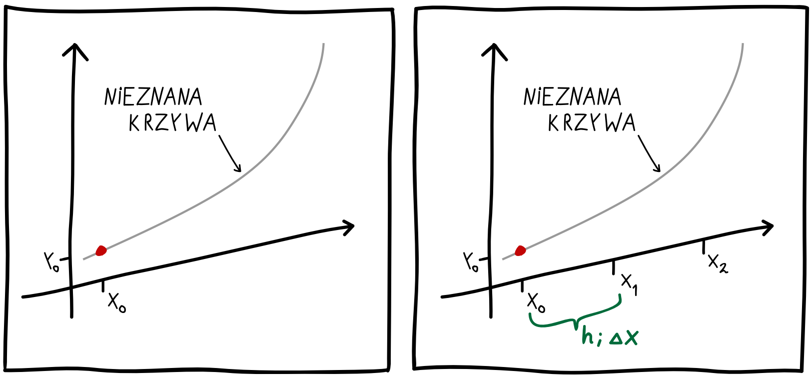
I tak dalej, i tak dalej. Zwróćcie uwagę, że nasze pochodne mogą być funkcjami wielu argumentów! Także takich, o których wydaje nam się, że ich nie znamy, np. pochodna czasowa z ilości lisów zależy także od ilości królików. Na tym etapie nie należy się tym zbytnio przejmować, tylko rozwiązywać je tak jakbyśmy je doskonale znali. Ale o tym więcej w następnej części.

Metoda Eulera

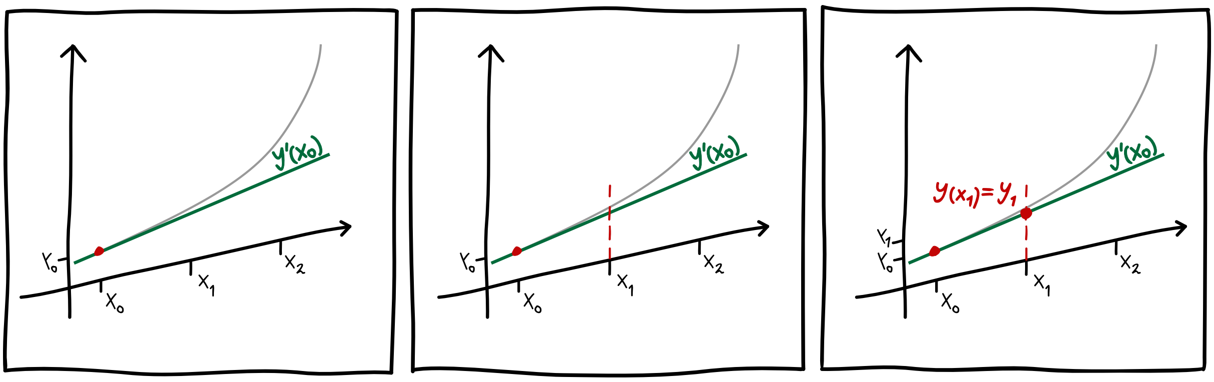
W metodach numerycznych nie poszukujemy funkcji. Nie odpowiedzą nam, że całką z *x* będzie x^2, ale mogą dość dobrze przybliżyć nam wartość funkcji w miejscach, których szukamy. I to się właśnie liczy. Metoda Eulera jest super sędziwą, bo liczącą już 255 lat, ale za to najprostszą z tych metod, której przybliżony sposób użycia wygląda następująco:

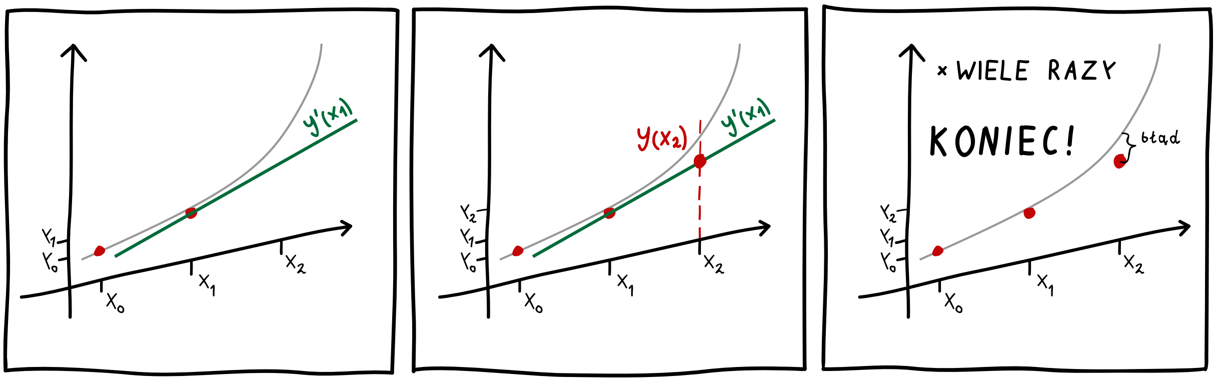
Startujemy od układu współrzędnych, na której mamy zaznaczony nasz punkt początkowy $y(x_0) = y_0$. Wybieramy sobie jakąś wartość kroku, *h* lub *dx*, która pozwoli nam zaznaczyć wiele punktów na osi x.

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$



Znamy wartość w punkcie x_0, teraz chcemy poznać tą wartość w punkcie x_1. Podobnie jak w metodzie Netwona, możemy wyznaczyć pochodną danej funkcji w punkcie. Wszak mamy tą pochodną wyrażoną jakimś wzorem. Po przeciągnięciu prostej wyrażającej pochodną do przecięcia z punktem x_1 możemy zaznaczyć ten punkt jako wartość $y(x_1)$.



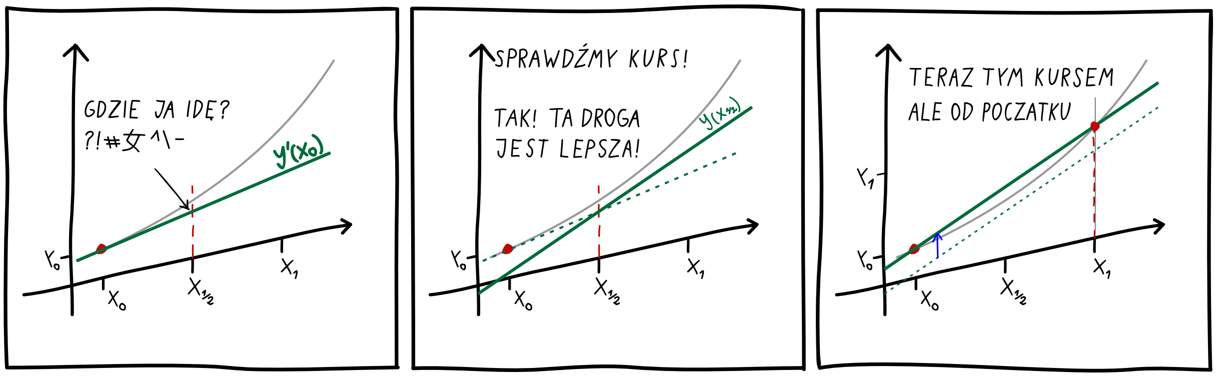


Otrzymaną wartość możemy wykorzystać by policzyć wartość funkcji w punkcie x_2, a następnie w punkcie x_3, x_4 i tak dalej, i tak dalej… Ogólne wyrażenie na wartość funkcji w kolejnym kroku przyjmuje postać:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot f'(x_i, y_i)$$

Metoda Runge-Kutty (bez s) drugiego rzędu

Jak widzicie, metoda Eulera obarczona jest błędem wynikającym z tego, że pochodna się zmienia. Błąd ten oczywiście możemy zmniejszyć skracając krok metody, ale czasami warto wykorzystać nieco bardziej wyrafinowane metody niż metoda Eulera. Kolejną w kolejce skomplikowanie jest metoda Runge-Kutty drugiego rzędu. W pierwszym kroku, liczymy tak samo jak w metodzie Eulera, ale zatrzymujemy się w środku kroku, liczmy nową, zazwyczaj bardziej poprawną pochodną. I to ją wykorzystujemy do obliczenia kolejnej wartości funkcji.



A ogólne równanie na następną wartość funkcji wygląda następująco:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot f'\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} f'(x_i, y_i)\right)$$

Zadania

1) Oblicz algebraicznie i z wykorzystaniem metody Eulera następujący problem początkowy. Stwórz wykres obu funkcji. Obserwuj, jak zmienia się wykres wraz z zmianą kroku h.

$$\begin{cases} y' = -3x^2 + 20x + 6 \\ y(0) = 150 \end{cases}$$

2) Stwórz wykres w zakresie od -1 do 10 dla funkcji będącej rozwiązaniem poniższego problemu początkowego:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(x-4)y}{5} \\ y(-1) = 10 \end{cases}$$

3) Korzystając z metody Eulera policz trajektorię pocisku wystrzelonego przez katapultę znajdującą się na murach obronnych. Katapulta miota pocisk o prędkości początkowej *V*=50 m/s pod nastawnym kątem α . Pocisk rozpoczyna swój lot na wysokości 10 m nad ziemią i leci nad płaskim przedpolem, a jedyną uwzględnianą siłą jest przyśpieszenie ziemskie. Policz zasięg katapulty przy różnych kątach.

4) Rozwiąż przykład z wstępu! Za początkowa liczebność królików i lisów przyjmij 1 i 0.5, a jako parametry a, b, c, d wartość 1. Obliczenia wykonaj dla 20 lat (t max = 20). Jak zachowuje się funkcja w zależności od wielkości kroku?
b) Rozwiąż przykład dla wartości c=0.1. Obliczenia wydłuż do 40 lat.
c) Jeden z wcześniejszych wariantów rozwiąż przy użyciu algorytmu Runge-Kutty drugiego rzędu. Ale spróbuj dokonać tego z znacznie mniejszym krokiem. Porównaj kroki z obu metod dające porównywalne jakości wyników.