Rozwiązywanie układów równań metodami bezpośrednimi – Metoda Gausa

Zadania do wykonania

1. Stwórz funkcję umożliwiającą rozwiązywanie układów równań metodą Gausa-Jordana, lub innym wariantem. Do wykonania zadania proszę wykorzystać bibliotekę GSL bez wykorzystania wbudowanych solverów.
2. Rozpatrujemy układ równań $A \cdot x = y$ gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 2q & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 10 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ oraz } b = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   Proszę rozwiązać ten układ równań dla $q \epsilon (0; 3)$ z krokiem 0.01. (Zauważcie, że dla $q = 1$ układ ten jest sprzeczny i nie posiad rozwiązań).
   Dla każdej wartości q należy policzyć wektor $c = A * x$ (wektor ten, w idealnej sytuacji powinien być równy wektorowi b). A następnie odchylenie pomiędzy wektorami b i c z wyrażenia:

$$o(q) = 1/5\sqrt{\sum(c_i - b_i)^2}.$$

3. W domu: proszę przygotować wykres odchylenia w funkcji parametru q. Proszę omówić zachowanie wspomnianego odchylenia oraz możliwe jego przyczyny.

UWAGA!

Dla przejrzystości kodu, metodę Gaussa, mnożenie macierzy itp. należy zaprogramować jako funkcje!

Metoda Gausa–Jordana w 3 uderzenia głową w mur

Uwaga! Poniższy tekst jest bardzo uproszczony, pod względem matematyki jak i ilości możliwych wyjątków. Ma on na celu jedynie przybliżenie metody, która będzie przedstawiona na wykładzie. Zakładam, że sama Eliminacja Gausa kołacze się Wam jeszcze po głowie, dlatego będę mocno upraszczał:

Metoda Gausa-Jordana ma na celu sprowadzenie macierzy do macierzy jedynkowej. Dzieje się to w 2 krokach. W pierwszym, podobnie jak w metodzie Gausa sprowadzamy macierz A do macierzy trójkątnej. Z jedną modyfikacją! Na diagonali muszą znajdować się same jedynki! Ponieważ moja **wieczysta** licencja na oprogramowanie do edycji równań właśnie wygasła i nie znalazłem jeszcze jakiegoś zamiennika będę się posługiwał przykładami przygotowanymi wcześniej dla inżynierii materiałowej, albo same wzory będą wyglądać paskudnie. Przepraszam. :(

Zacznijmy od naszego problemu **Ax=b**:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 18 \\ 28 \\ 28 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Krok 1: dzielimy pierwszy wers przez wartość a_{11}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 18 \\ 28 \\ 28 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Krok 2: Tak samo jak w oryginalnej metodzie Gausa zerujemy wszystkie poddiagonalne w pierwszej kolumnie. Nie musimy liczyć współczynnika l_{ij} ponieważ na diagonalnej jest jedynka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2-2\cdot 1 & 4-2\cdot 1 & 2-2\cdot 3 & -6-2\cdot 4 \\ 3-3\cdot 1 & 4-3\cdot 1 & 1-3\cdot 3 & 2-3\cdot 4 \\ 4-4\cdot & 2-4\cdot 1 & 2-4\cdot 3 & 2-4\cdot 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 18-2\cdot 17 \\ 28-3\cdot 17 \\ 28-4\cdot 17 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -14 \\ 0 & 1 & -8 & -10 \\ 0 & -2 & -10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -16 \\ -23 \\ -40 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Krok 3: Powtarzamy pierwszy krok dla diagonalnej w drugim wersie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -8 & -10 \\ 0 & -2 & -10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ -23 \\ -40 \end{bmatrix} \tag{5}$$

I krok nr 2 dla kolejnych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -14 & -28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ -15 \\ -56 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Itd., itd., aż do uzyskania macierzy trójkątnej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -14 & -28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ 2.5 \\ -56 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ 2.5 \\ -21 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Ostatnim krokiem, możliwe, ze dla was poza pętlą zadbanie o jedynkę w ostatnim elemencie macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Połowa drogi za nami! Teraz należy wyzerować wszystkie ponad diagonalne. Zasada jest dość podobna, ale pamiętając, że na dole, poza diagonalą wszędzie mamy zera możemy opuścić jeden for. Więc najpierw zerujemy nad diagonalne w ostatniej kolumnie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4-4\cdot 1 \\ 0 & 1 & -2 & -7+7\cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5-0.5\cdot 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17-4\cdot 1 \\ -8+7\cdot 1 \\ 2.5-0.5\cdot 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

I iteracyjnie przesuwamy się w górę i zerujemy wcześniejsze wersy.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3-3\cdot 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2+2\cdot 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13-3\cdot 2 \\ -1+2\cdot 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

By osiągnąć rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-1\cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-1\cdot 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

KONIEC!

PS. Dla zmniejszenia ilości koniecznych obliczeń, poczynając od wzoru (10) można prowadzić operacje tylko i wyłącznie na wektorze **b**, ale jak będziecie to robić również dla macierzy będzie wam łatwiej kontrolować czy nie popełniliście jakiegoś błędu.