Diagonalizacja macierzy metodą potęgową

Wprowadzenie:

Dzięki niespotykanej wydajności zaprojektowanych piecy cały wasz zespół dostał sposobność pracy dla największego wśród żywych wynalazcy: Zombinarda Va Dinciego! Ten zakrawający o szaleństwo geniusz przedstawia wam swój najnowszy projekt pułapki przeciwko zombie! To oparte o drgającą antyrezonansowo dwuwymiarową strunę… …wywołującą kawitację w warstwie Helmholtza… …nadlepkość fononową… … kanapka z podwójnym serem… …uderzenie subsoniczne… … 987 plam na suficie, 988, 989… …1275, 1278, trzeba zacząć od nowa… … interferencję koloru zielonego z zapachem waniliowym… … sprawi, że zombie po prostu zamienią się w lody pistacjowe. Ogólnie jaki widzicie to bardzo proste i aż dziw bierze, że nikt nie zrobił tego wcześniej. Jedyne dwa prawdziwe wyzwania stojące przed projektem to konieczność przeprowadzenia bardzo dokładnych obliczeń i utrzymania otrzymanych w ten sposób lodów w stanie zamrożonym aż do czasu zebrania ich przez ekipę sprzątającą. Nim dopuszczą was do obliczeń na ostatnim pozostałym z zamierzchłych czasów super-duper komputerze Amiga 500 musicie udowodnić swoją przydatność na prostszym zadaniu:

Obiekt pracy:

Symetryczna macierz A o wymiarze 7x7 (n=7), wypełniona elementami:

$$A_{ij} = (2 + |i + j|)^{\frac{-|i+j|}{2}}$$

Cel:

Wyznaczenie wartości wszystkich siedmiu wektorów własnych tej macierzy $\boldsymbol{x_i}$ i wszystkich siedmiu wartości własnych λ_i $i = 0, 1, 2, \ldots n - 1$

Metoda pracy:

Metoda potęgowa: To metoda iteracyjna pozwalająca obliczyć wszystkie wektory własne macierzy za pomocą schematu:

1. Przygotowanie macierzy $W_0 = A$, (macierz, która będzie ulegać zmianie w trakcie obliczeń).
2. Przygotowanie n elementowego wektora startowego $\boldsymbol{x}_0^0 = [1, 1, \ldots]$

3. Obliczenie kolejnych przybliżeń wektora własnego, x_0^{i+1} i wartości własnej λ_0^{i+1}. UWAGA. Indeks dolny oznacza numer wektora własnego i jego wartości własnej, jest ich tyle jaki jest rozmiar macierzy. Indeks górny oznacza kolejne przybliżenia.

$$\boldsymbol{x}_0^{i+1} = W_0 \boldsymbol{x}_0^i$$

$$\lambda_0^i = \frac{\left(\boldsymbol{x}_0^{i+1}\right)^T \boldsymbol{x}_0^i}{\left(\boldsymbol{x}_0^i\right)^T \boldsymbol{x}_0^i}$$

$$\boldsymbol{x}_0^i = \frac{\boldsymbol{x}_0^{i+1}}{\left\|\boldsymbol{x}_0^{i+1}\right\|_2}$$

4. Punkt 3 powtarzamy M razy.
5. W celu obliczenia kolejnego wektora własnego i kolejnej wartości własnej należy zredukować macierz W_0 i usunąć z niej już obliczony wektor własny:

$$W_1 = W_0 - \lambda_0 \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{x}_0^T$$

   $\boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{x}_0^T$ to iloczyn tensorowy. Tj.: $B = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ zwraca macierz $B_{ij} = \boldsymbol{x}_i * \boldsymbol{y}_j$.
6. Powtarzamy punkty 2-4.
7. Całość powtarzamy aż do wyznaczenia wszystkich wektorów własnych.

Zadanie do wykonania

1. Napisz program wyznaczający wszystkie wektory własne i wartości własne macierzy. Wartość M =12.
   UWAGA! Aby zachować przejrzystość kodu, poszczególne operacje mnożenia wektorów i macierzy należy zapisać jako funkcje. I ogólnie rzecz biorąc stosować rozsądne gospodarowanie kodem.

2. Wypisz do pliku otrzymane wartości własne oraz wektory własne.

3. Stwórz macierz wektorów własnych $X = [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}]$ i oblicz wartość macierzy $D = X^T A X$ (Oczywiście trzeba ją też wypisać)

4. Wypisz do pliku kolejne przybliżenia wartości własnych (w każdej iteracji), przygotuj wykres przedstawiający jak zmieniały się te wartości dla kolejnych iteracji.

5. Całość powtórz dla M=120.

6. Omów otrzymane wyniki. Jaka jest, a jakie powinny być wartości wektorów własnych? Ile iteracji jest potrzebne do znalezienia każdej z tych wartości? Jakie są różnice pomiędzy obliczeniami dla M = 12, a m=120? Czy ma to wpływ na wartość macierzy D?