Interpolacja funkcji metodą Lagrange'a

Generał Pulter jest strasznie wściekły, ponieważ nie satysfakcjonuje go gęstość z jaką wyznaczane są mapy koncentracji chord zombie i on nie będzie pracował na takich poszatkowanych danych. Jego wściekłość była jeszcze większa gdy usłyszał ile środków trzeba by przeznaczyć by nanieść te *&#)$!(^# znaczki gęściej. Ale głównodowodzącym sił zbrojnych nie zostaje człowiek, któremu na drodze mogą stanąć tak prozaiczne rzeczy jak logika czy matematyka. Zażyczył sobie, że grupa informatyków ma interpoLOLować mu te mapy tak aby zwiększyć ich dokładność. (Ciekawe skąd w ogóle zna takie trudne słowa). Jak zwykle takie rzeczy wypadają na najmłodszego członka zespołu. Czyli na Ciebie. Nim zabierzesz się za dane z map, poćwicz trochę na prostych przykładach znanych funkcji matematycznych.

Twoim celem będzie wykonanie interpolacji Lagrange'a dla dwóch funkcji:

a) $y(x) = \exp(-x^2)$

b) $\begin{cases} y(x) = -1 \; dla \; x < 0 \\ y(x) = 1 \quad dla \; x \geq 0 \end{cases}$

c) $y(x) = \cos(2 * x)$

w przedziale $x \in [-5, 5]$ (Podczas laboratoriów wystarczy wykonać dla jednej funkcji).

Zadanie do wykonania

1. Przygotuj funkcję dokonującą interpolacji Lagrange'a i zwracającą przybliżone wartości funkcji dla wskazanych parametrów x. Funkcja argumentami funkcji powinny być: wektor położeń węzłów ***x***, wektor wartości funkcji w węzłach ***y***, oraz wektor wartości ***x₂***, dla których dokonujemy wyliczenie wartości wielomianu. Funkcja powinna zwracać oczywiście wartość wielomianu ***y₂*** dla żądanych węzłów.

2. Przeprowadź interpolację funkcji zakładając, że znamy wartości tylko w n, równo rozłożonych węzłach, n = 5, 10, 15, 20. Dla każdego z n proszę przygotować wykres zawierający: interpolowaną funkcję obliczoną nie rzadziej niż co 0.1 (linia); wartości funkcji dla zadanych n węzłów (znaczniki); interpolowaną funkcję również policzoną nie rzadziej niż co 0.1 (linia). W przypadku wystąpienia bardzo silnych oscylacji na końcach przedziału zastosuj skalę pozwalającą na analizę przebiegu badanej funkcji.

3. Wykonaj optymalizację położeń węzłów z wykorzystaniem wielomianu Czybyszewa. Optymalne położenia węzłów obliczamy jako kolejne zera wielomianu Czybyszewa (patrz wykład). Co w tym przypadku można sprowadzić do rozwiązania równania:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(x_{max} - x_{min})\cos\left(\pi\frac{2m+1}{2n'+2}\right) + (x_{max} + x_{min})\right], \quad m = 0,1,2,\dots,n'$$

   gdzie: x_{max} i x_{min} to granice przedziału optymalizacji, a n'+1=n to całkowita liczba węzłów. Wykorzystując tak zoptymalizowane położenia węzłów przygotuj kolejne wykresy analogicznie do wytycznych z punktu 2.

4. W sprawozdaniu omów możliwości i ograniczenia interpolacji metodą Lagrange'a, oraz wpływ wykorzystania optymalizacji położeń węzłów na jakość wyników.

Interpolacja metodą Lagrange'a

Interpolacja funkcji metodami wielomianowymi wykorzystuje fakt, że do n punktów możemy dopasować jeden i tylko jeden wielomian o stopniu n-1, który przechodzi przez wszystkie dane punkty. Możemy wtedy zapisać układ równań:

$$a_0 + a_1 x_i^1 + a_2 x_i^2 + \cdots + a_{n-1} x_i^{n-1} = y_i, \quad dla\ i = 1,2,3,\dots,n$$

które można zapisać w postaci macierzowej jako:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

po rozwiązaniu, którego można uzyskać współczynniki wielomianu i następnie wykorzystać je do obliczenia wartości funkcji w dowolnych punktach.

Aby uniknąć konieczności, czasami bardzo czasochłonnego, rozwiązywania powyższego układu równań linowych, możliwe jest bezpośrednie obliczenie interpolowanych wartości bez konieczności wyznaczania współczynników wielomianu. Służy do tego właśnie wzór interpolacyjny Lagrange'a, który w skróconej formie przybiera następującą postać:

$$W_n(x) = \sum_{j}^{n} y_j \frac{\prod_{k\neq j}^{n}(x - x_k)}{\prod_{k\neq j}^{n}(x_j - x_k)},$$

gdzie: $W_n(x)$ interpolowana wartość dla dowolnego argumentu x, x_j oraz x_k oznaczają położenia znanych węzłów, a y_j wartość funkcji w j-tym węźle.