Interpolacja funkcjami sklejanymi

To, że za pierwszym razem nie wyszło tak ja chciał tego generał Pulter nic nie zmienia. „Będziemy walczyć z tym problemem aż do skutku. Aż nie uda nam się pokonać ostatniego żywego bita!” powiedział dziennikarzom oficer prasowy sztabu. „Zapewne wielu z was zginie, ale jest to poświęcenie, na które jestem gotów.” Tak według pragnącego zachować anonimowość żołnierza zwykł mawiać sam generał.

Ponieważ armia się nie cofa, dalej trzeba zająć się problemem interpolacji funkcji. Tym razem na cel zostaje wzięta metoda interpolacji funkcjami sklejanymi. Dla uzyskania porównania korzystamy z tych samych funkcji co poprzednio:

a) $y(x) = \exp(-x^2)$

b) $\begin{cases} y(x) = -1 \; dla \; x < 0 \\ y(x) = 1 \quad dla \; x \; \geq 0 \end{cases}$

c) $y(x) = \cos(2 * x)$

w przedziale $x \in [-5, 5]$ (Podczas laboratoriów wystarczy wykonać dla jednej funkcji).

Interpolacja funkcjami sklejanymi z wyznaczeniem drugich pochodnych

W tym przypadku interpolację musimy rozpocząć od wyznaczenia wartości drugich pochodnych w węzłach funkcji. Oznaczmy je jako m_i, gdzie i tradycyjnie oznacza numer węzła, dla którego wyznaczamy nasze wartości. Niestety nie wystarczy wykorzystać tutaj iloczynu różnicowego, ale cała sprawa i tak sprowadza się tylko do rozwiązania następującego układu równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Dlaczego jest taki dziwny na początku i końcu? Ponieważ jak w przypadku transportu ciepła takie zagadnienia sprawiają problemy na brzegach i aby móc je rozwiązać musimy się posiłkować jakimś wytrychem. Tutaj wartości α i β to po prostu zadane wartości drugiej pochodnej z funkcji na brzegu. A ponieważ nie potrafimy ich wyznaczyć, to założymy, że będą równe 0. Pozostałe parametry w tym układzie równań to:

Odległość między węzłami:

$$h_i = x_i - x_{i-1},$$

(W tym projekcie odległości między węzłami będą stałe, ale lepiej napisać coś, co nie będzie miało takiego ograniczenia).

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right),$$

$$\lambda = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}},$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i.$$

x_i to oczywiście położenia znanych węzłów funkcji, a y_i wartość funkcji w poszczególnych węzłach.

Układ równań rozwiązujemy jedną z metod rozwiazywania układów równań liniowych. Możecie skorzystać z własnych funkcji lub np. rozkładu LU z pierwszych zajęć:

Posiadając wartości drugich pochodnych w węzłach funkcji możemy wykorzystać je do interpolacji funkcji w położeniach międzywęzłowych:

$$S(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

gdzie:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1}),$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6},$$

a *i* oznacza numer przedziału, w którym znajduje się *x*, wyznaczanego jako: $x_{i-1} < x < x_i$

Zadanie do wykonania

1. Przygotuj funkcję dokonującą obliczającą drugą pochodną funkcji w węzłach sieci oraz funkcję zwracającą interpolowane wartości dla wskazanych wartości x. (Z uwagi na punkt trzeci, potrzebne bam będą wyznaczone wartości drugich pochodnych).

2. Przeprowadź interpolację funkcji podanych na początku zadania, zakładając, że znamy wartości tylko w n, równo rozłożonych węzłach, n = 5, 10, 20. (15 chyba nie będą potrzebne). Dla każdego z n proszę przygotować wykres zawierający: **interpolowaną funkcję** obliczoną nie rzadziej niż co 0.1 (linia); **wartości funkcji dla zadanych n węzłów** (znaczniki); **wykres interpolowanych wartości** policzoną nie rzadziej niż co 0.1 (linia). Zakres interpolacji to dalej $x \in [-5,5]$, $\alpha = 0, \beta = 0$

3. Dla dwóch wybranych funkcji w przypadku 10 lub 20 węzłów policz wartości drugich pochodnych w węzłach funkcji. Algebraicznie bądź korzystając z iloczynu różnicowego:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2}$$

   Korzystając z kroku *h*=0.01. (To nie to samo *h* co wcześniej). Wykonaj wykres drugich pochodnych w funkcji położenia obliczonych przy pomocy ww. metody i metody z pt. 1. Porównaj otrzymane wartości z wartościami rzeczywistymi

W sprawozdaniu oprócz omówienia zalet, wad itp. tej metody interpolacji proszę porównać otrzymane wyniki do wyników otrzymanych z wykorzystaniem interpolacji Lagrangea.