Całkowanie: Metoda trapezów i Sipsona

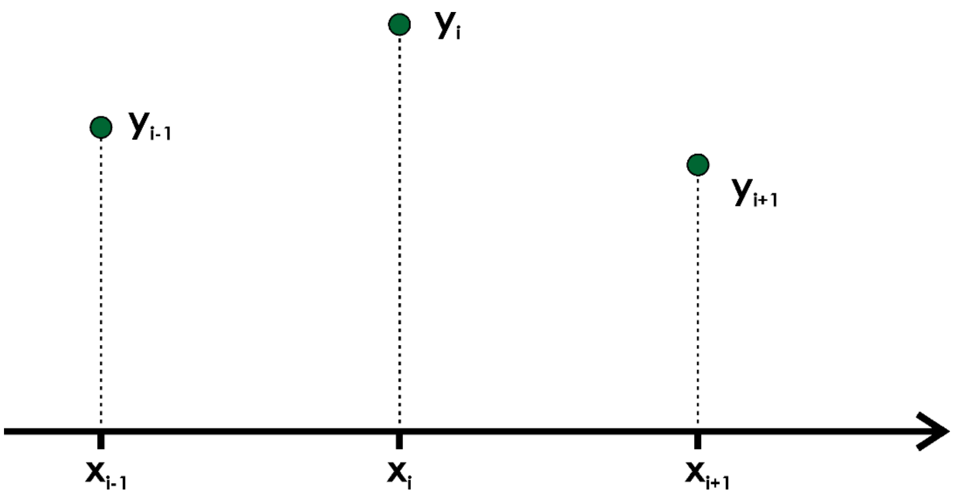
Ratunku!!!! Gonią mnie mózgożerne padalce! Aby mnie uratować musicie policzyć te całki: - Ale jak całkowanie ma kogoś uratować? – Nie pytaj tylko całkuj!

– Ale jak?

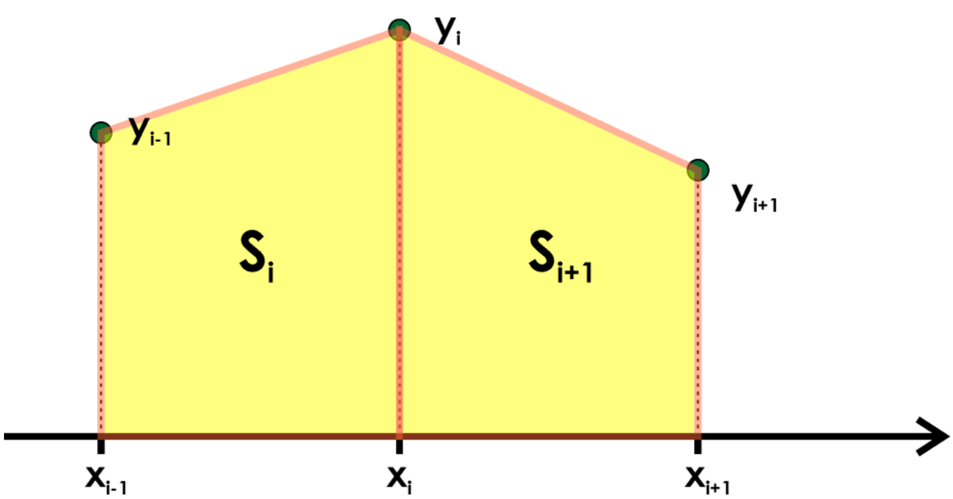
– A tak: (A dodatkowe informacje znajdziecie na standardowej, super tajnej stronie)

Metoda trapezów:

Jest to jedna z najpopularniejszych i zarazem najprostszych metod całkowania numerycznego. Jeżeli dysponujemy stablicowanymi wartościami funkcji y dla danych węzłów:



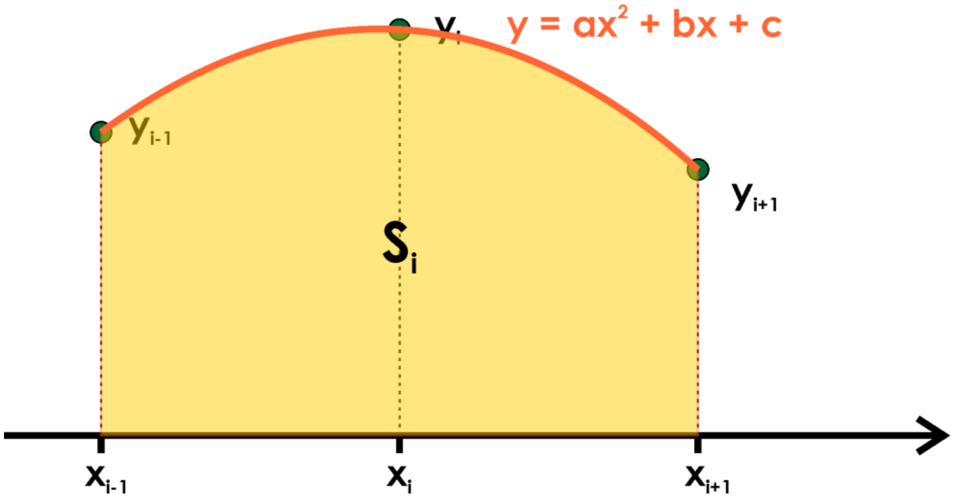
Pole powierzchni pod funkcją możemy przybliżyć za pomocą trapezów prostokątnych, których podstawy będą równe wartościom funkcji w węzłach, a wysokością trapezu będzie odległość między węzłami.



Następnie należy jedynie zsumować pola wszystkich trapezów i gotowe. Musicie tylko pamiętać, że jeżeli dysponujecie *n* węzłami, to liczba trapezów będzie zawsze o jeden mniejsza!

Metoda Simpsona:

Z wcześniejszych zajęć powinniście pamiętać, że jeżeli dysponujemy kilkoma punktami, to zawsze można do nich dopasować wielomian o rzędzie o jeden mniejszym. A jeżeli posiadamy już wielomian, który stanowi przybliżenie naszej funkcji, to policzenie jego całki nie stanowi większego problemu. I na tym dokładnie polega metoda Simpsona. Dysponując trzema punktami, przybliżamy funkcję za pomocą funkcji kwadratowej i następnie liczymy całkę w przedziale od x_{i-1} do x_{i+1}.



Na całe szczęście Tomek Simpson był tak dobry uwolnił nas od konieczności bezpośredniego wyznaczania wielomianu, liczeniu całki oznaczonej, itd. i dostarczył finalne równanie na pole powierzchni pod funkcją:

$$S_i = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$$

gdzie *h* to odległość między sąsiednimi węzłami.

Trzeba tylko pamiętać, że odległości między węzłami w tym podejściu muszą być równe, a sumując poszczególne obiekty musimy przesuwać się o dwa węzły, tak by nasze obiekty nie nachodziły na siebie. Z tego wynika, że metodę tę można stosować tylko w przypadku, gdy liczba węzłów jest nieparzysta.

Zadania do wykonania:

Interesują nas dwie całki:

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} x \sin(5x)\, dx$$

Interesuje nas jak sprawnie obie metody poradzą sobie z przybliżeniem ich wartości w zależności od ilości wykorzystanych węzłów. Aby to zobrazować proszę przygotować wykres $|C - I|$ w funkcji ilości wykorzystanych węzłów, gdzie C to dokładna wartość całki, policzona algebraicznie przez was lub z pomocą wolframa a I to wartość policzona numerycznie. Proponuję przyjąć liczbę węzłów od 11 do 201.

Mniej więcej tak: