Optymalizacja – poszukiwanie ekstremów funkcji metodą złotego podziału

W zapomnianych magazynach wojskowych odnaleźliście armatohaubicę Krab wraz z dużą ilością części zamiennych i jeszcze większymi zapasami amunicji. To przecież świetne rozwiązanie by móc ustawić się w bezpiecznej odległości i spokojnie ostrzeliwać gniazda zombie. Tylko jak z tego cholerstwa korzystać? Jak tym celować? Na zmurszałych dyskietkach odnaleźliście prawie kompletny komiks z instrukcją obsługi, więc z obsługą nie będzie wielkiego problemu. Niestety program do celowania jest kompletnie zniszczony. Jedynym fragmentem kodu źródłowego, który udało się odczytać jest funkcja obliczająca trajektorię lotu pocisku 155 mm ERFB-BB, (kod w załączniku). Ale co to dla was za problem. Przecież dysponując funkcją obliczającą trajektorię możecie sami napisać taki program! W międzyczasie kumpel potrzyma wam piwo. Nim stracicie swoje piwo musicie:

1. Zaprogramować metodę złotego podziału do poszukiwania minimum funkcji.

2. Znaleźć kąt ostrzału, który pozwoli na uzyskanie maksymalnego zasięgu przy założeniu, że zarówno działo jak i cel znajduje się na wysokości 0 m n.p.m. W tym przypadku można wykorzystać fakt, że maksimum funkcji $f(\alpha)$ jest równocześnie minimum funkcji $-f(\alpha)$. (Z różnych powodów standardem jest tworzenie funkcji szukających minimów. Maxima są opcją). Jako krańce przedziału startowego proszę przyjąć $\alpha_a = 20°,\ \alpha_b = 70°$, a jako warunek końca: $\varepsilon = 10^{-6}$.

3. Przygotuj wykresy: (Na zajęciach dane. Ale niech te dane będą w postaci plików, a nie wypisania na ekran)
   - zasięg działa w funkcji kąta ostrzału z zaznaczonym maximum
   - trajektorię lotu pocisku dla maksymalnego zasięgu
   - wykres logarytmu modułu różnicy rozwiązania dokładnego (przyjmij 50.8057242086663) i rozwiązania przybliżonego w każdej iteracji działania funkcji, dla $(\lambda_1, \lambda_2) = (r^2, r)\ i\ (\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

4. Zmodyfikuj program tak, aby pozwalał na wyznaczenie kąta ostrzału w przypadku, gdy cel znajduje się w określonej odległości i wysokości (innej niż wysokość umiejscowienia artylerii). Określ pod jakim kontem trzeba wystrzelić by trafić w cel, gdy znajduje się 30 km od stanowiska artylerii, na wysokościach: a) 0 m n.p.m.; b) 300 m n.p.m. Dla obu przypadków sporządź wykres trajektorii lotu pocisków.

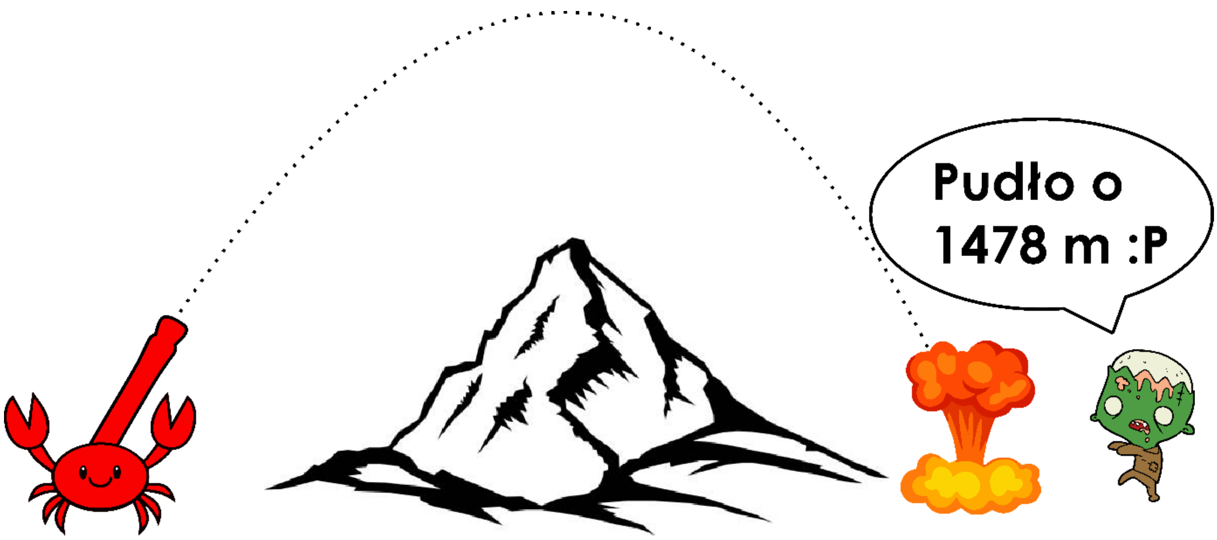
Metoda złotego podziału

Metoda złotego podziału polega na iteracyjnym podziale przedziału $x \in [x_a, x_b]$ na trzy części, a następnie zawężeniu. Podziału dokonujemy poprzez wyznaczenie 2 punktów $x_1 = x_a + \lambda_1(x_b - x_a)$ oraz $x_2 = x_a + \lambda_2(x_b - x_a)$, gdzie $\lambda_1 = r^2,\ \lambda_2 = r, r = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Zawężenia przedziału dokonujemy poprzez podstawienie wartości brzegowej wartościami $x_1\ lub\ x_2$: jeżeli $f(x_1) > f(x_2)$ to $x_a = x_1$, jeżeli $f(x_1) < f(x_2)$ to $x_b = x_2$.
Całość obliczeń przeprowadzamy do osiągnięcia krańcowej szerokości przedziału $|x_b - x_a| < \varepsilon$.

UWAGA!!! W funkcji obliczającej trajektorię lotu pocisku również pojawia się parametr x. To są kompletnie różne parametry, a ich wspulną częścią jest jedynie to, że matematycy uwielbiają opisywać oś poziomą jako x, nagminnie gubią x, a potem muszą go szukać, itp. x w metodzie złotego podziału odpowiada kątowi alfa zadawanemu w funkcji artyleria. Niby mógłbym napisać instrukcję metody złotego podziału dla α, ale musicie się przyzwyczajać, że czasami trzeba łączyć metody i funkcje, które wykorzystują tak samo opisane parametry. Dodatkowo mi się nie chce. ;)

PS. Na końcu punktu 3, tak naprawdę porównujecie metodę złotego podziału i trójpodziału. Metoda złotego podziału maj jeszcze jedną zaletę. Aktualnie, przy najprostszym podejściu przy każdej iteracji funkcji potrzeba dwukrotnie obliczyć wartość funkcji celu. Metoda złotego podziału pozwala recyklingować wartość pochodzącą z poprzedniej iteracji. I obliczać funkcję celu tylko raz na iterację. Ale nie jest to niezbędne podczas aktualnych zajęć.



[Krabów nie ma, ale też jest zajebiście]()

Dla zainteresowanych, skrótowo o działaniu funkcji Wziuuum:

Funkcja ta wykorzystuje metodę Eulera do rozwiązania układu czterech równań różniczkowych wyrażających czasową zależność:
Szybkości poruszania się pocisku:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{F}{m} - g * \sin\alpha$$

Kąta nachylenia stycznej do toru lotu pocisku:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{g * \cos\alpha}{V}$$

Współrzędnej poziomej pocisku:

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t} = V * \cos\alpha$$

I współrzędnej pionowej:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = V * \sin\alpha$$

Po drodze obliczając zmianę gęstości powietrza wraz z zmianą wysokości, siłę tarcia i tym podobne pomniejsze detale.

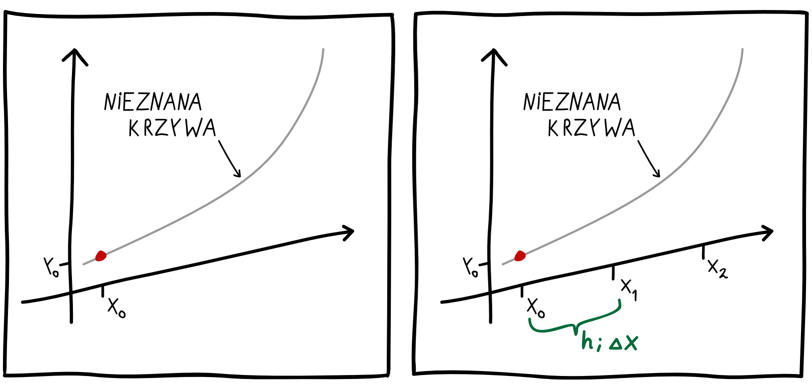
Metoda Eulera

Metoda Eulera to jedna z najprostszych metod rozwiązywania zagadnienie początkowego Cauchego. Np.:

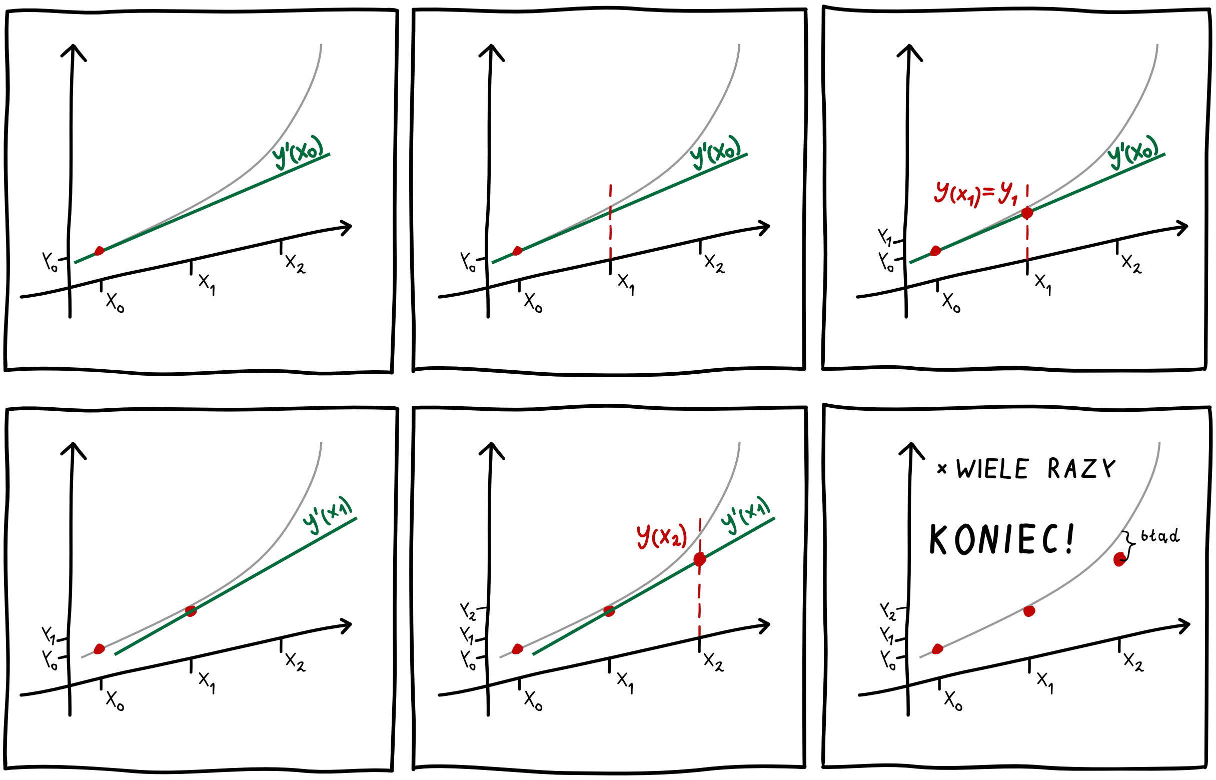
$$\begin{cases} f'(x,y) = co\acute{s} \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Startujemy od układu współrzędnych, na której mamy zaznaczony nasz punkt początkowy $y(x_0) = y_0$. Wybieramy sobie jakąś wartość kroku, *h* lub *dx*, która pozwoli nam zaznaczyć wiele punktów na osi x.

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$



Znamy wartość w punkcie x_0, teraz chcemy poznać tą wartość w punkcie x_1. Podobnie jak w metodzie Netwona, możemy wyznaczyć pochodną danej funkcji w punkcie. Wszak mamy tą pochodną wyrażoną jakimś wzorem. Po przeciągnięciu prostej wyrażającej pochodną do przecięcia z punktem x_1 możemy zaznaczyć ten punkt jako wartość $y(x_1)$.



Otrzymaną wartość możemy wykorzystać by policzyć wartość funkcji w punkcie x_2, a następnie w punkcie x_3, x_4 i tak dalej, i tak dalej… Ogólne wyrażenie na wartość funkcji w kolejnym kroku przyjmuje postać:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot f'(x_i, y_i)$$