FIZYKOCHEMIA CIAŁA STAŁEGO
LABORATORIUM

Przepływ ciepła w stanie stacjonarnym, równanie Laplace'a

Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Inżynierii Materiałowej i Ceramiki

Kraków 2019

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z procesem transportu ciepła w ciałach stałych i prostymi metodami numerycznymi pozwalającymi na wyznaczenie rozkładu temperatury w stanie stacjonarnym (rozwiązanie równania Laplace'a).

Wprowadzenie

Energia wewnętrzna ciał, zazwyczaj wyrażana jako temperatura tych ciał, może być przekazywana do otoczenia poprzez pracę lub ciepło. Wyróżniamy 3 mechanizmy transportu ciepła:

- **radiacja**
- **konwekcja**
- **przewodzenie**

Głównym mechanizmem transportu ciepła w ciałach stałych jest przewodzenie. Do opisu tego zjawiska stosuje się równanie Fouriera:

$$\vec{Q} = -\lambda \nabla T \, , \tag{1}$$

gdzie: $\vec{Q}$ – strumień ciepła [W/m2], λ – współczynnik przewodzenia ciepła [W/(m·K)] i T - temperatura [K].

Zmianę temperatury w czasie można opisać przy pomocy równania bilansu energii:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{Q} = 0 \, , \tag{2}$$

gdzie: ρ – gęstość [kg/m^3], c_p – ciepło właściwe [J/(g·K)] i $\nabla \cdot$ – to dywergencja.

Podstawiając równanie Fouriera do równania bilansu energii otrzymujemy ewolucyjne równanie opisujące proces transportu ciepła:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla \mathrm{T} \right) . \tag{3}$$

Równanie to pozwala obliczyć, jak zmienia się temperatura w czasie procesu. Jeżeli rozważamy proces stacjonarny, czyli taki w którym temperatura nie ulega zmianie, oraz przyjmiemy, że gęstości ciepło właściwe są wartościami stałymi lewa strona równania przyjmie wartość 0 i otrzymujemy równanie Laplace'a.

$$0 = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla \mathrm{T} \right) . \tag{4}$$

Obliczenia numeryczne

Proces transportu ciepła zachodzi na płaskiej powierzchni o kształcie kwadratu. Możemy dokonać podziału tej powierzchni na 25 równych kwadratów, dla których będziemy poszukiwać temperatur. Po dodaniu brzegów, otrzymamy macierz o rozmiarze 7×7, dla której wartości temperatur położone na brzegach będą znane, natomiast te wewnątrz będą wymagały obliczenia. Dla uporządkowania, poszczególne elementy tej macierzy będziemy oznaczać $T_{i,k}$ gdzie i – to numer wiersza, a k – numer kolumny.

20.7	20.7	20.7	20.7	20.7	20.7	20.7
20.7	21.5	22.4	23.3	24.7	27.4	34.2
20.7	22.4	24.0	25.6	27.4	30.2	34.2
20.7	23.3	25.6	27.4	29.3	31.6	34.2
20.7	24.7	27.4	29.3	30.9	32.5	34.2
20.7	27.4	30.2	31.6	32.5	33.4	34.2
34.2	34.2	34.2	34.2	34.2	34.2	34.2

Rys. 2. Przykładowa macierz temperatur wykonana w programie Excel. Na żółto zaznaczono znane temperatury na brzegach.

W ćwiczeniu rozważamy proces stacjonarny. Czyli taki, w którym temperatura nie zmienia się w czasie $\partial T / \partial t = 0$, dodatkowo: gęstość, ciepło właściwe i współczynnik przewodzenia ciepła można przyjąć jako stałe. Przy tych założeniach równanie **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** można zapisać jako:

$$\nabla \cdot \nabla \mathrm{T} = 0. \tag{5}$$

Ponieważ proces zachodzi w przestrzeni dwuwymiarowej, równanie to można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \tag{6}$$

Jedną z metod przybliżania pochodnych funkcji są ilorazy różnicowe. W przypadku poszukiwania drugiej pochodnej funkcji f możemy skorzystać z wyrażenia na iloraz różnicowy centralny dla drugiej pochodnej:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \tag{7}$$

gdzie h – to krok metody (najmniejsza odległość pomiędzy punktami pomiarowymi).

Pamiętając, że potrzeba wyznaczyć pochodną w obu kierunkach: x i y równanie (6) będzie można zapisać w formie dyskretnej:

$$\frac{T_{i+1,k}-2T_{i,k}+T_{i-1,k}}{h^2}+\frac{T_{i,k+1}-2T_{i,k}+T_{i,k-1}}{h^2}=0, \qquad \Big| \cdot h^2$$
$$4T_{i,k}=T_{i+1,k}+T_{i-1,k}+T_{i,k+1}+T_{i,k-1}. \tag{8}$$

$$\begin{array}{ccc} & T_{i-1,k} & \\ T_{i,k-1} & T_{i,k} & T_{i,k+1} \\ & T_{i+1,k} & \end{array}$$

Rys. 3. Schematyczny układ komórki i,k i otaczających ją komórek wraz z oznaczeniami.

Łatwo zauważyć, że w ten sposób możemy zapisać wyrażenie dla wszystkich wewnętrznych elementów macierzy. (temperatura na brzegach, poza wymienionym obszarem, jest zadana)

Dla niewielkich macierzy, rozwiązanie równania (8) jest możliwe z wykorzystaniem dodatku solver zaimplementowanego w program Excel. W tym celu, dla każdego obliczanego elementu macierzy należy policzyć wartość błędu:

$$\varepsilon_{i,k}=\left(T_{i+1,k}+T_{i-1,k}+T_{i,k+1}+T_{i,k-1}-4T_{i,k}\right)^2. \tag{9}$$

Błąd całkowity metody będzie wtedy sumą wszystkich błędów:

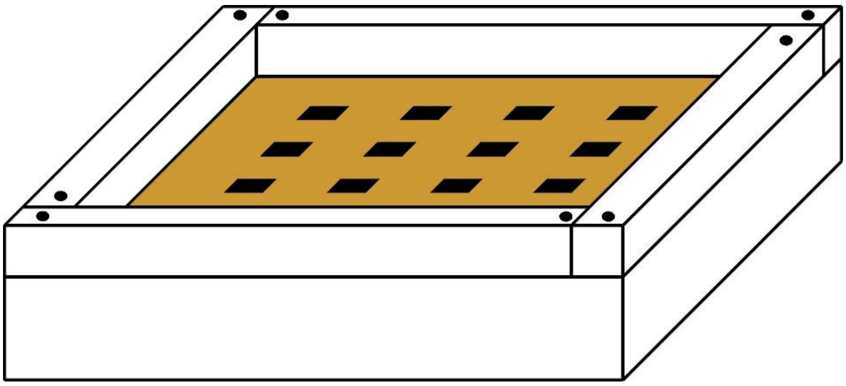
$$\varepsilon^{Tot}=\sum_i \sum_k \varepsilon_{i,k}. \tag{10}$$

Optymalizacja – Dodatek Solver

Instrukcja na zajęciach…

Wykonanie ćwiczenia

W omawianym ćwiczeniu należy wykonać pomiar rozkładu temperatur w układzie o ustalonych temperaturach na brzegach (zadanych warunkach brzegowych typu Dirichleta). Pomiar temperatury należy wykonać dla miedzianej płytki, po bokach której, znajdują się aluminiowe kształtowniki umożliwiające przepływ wody o znanej temperaturze. W celu uzyskania różnicy temperatur, dwa zbiorniki należy napełnić zimną i ciepłą wodą, a następnie, skierować ją do rurek za pomocą gumowych wężyków. Konfigurację zimnych i ciepłych brzegów można zmieniać wedle zaleceń prowadzącego.



Rys. 1. Schemat układu do ćwiczeń

- Po zmontowaniu układu i otwarciu zaworów należy odczekać aż przepływ ciepła osiągnie stan stacjonarny, (temperatury nie będą ulegać zmianie w czasie).
- Następnie, należy dokonać pomiaru rozkładu temperatur na płytce miedzianej. Dla ułatwienia, punkty pomiarowe zostały oznaczone czarnymi kwadratami.
- W celu zmniejszenia błędu pomiarowego, pomiar temperatur należy powtórzyć dwukrotnie.
- Jako temperaturę brzegów przyjmujemy temperaturę wody w zbiornikach. Należy ją zmierzyć przed i po zakończeniu pomiaru rozkładu temperatur.

Po zakończeniu pomiarów, wyniki należy opracować w formie graficznej oraz porównać z wynikami symulacji numerycznych. We wnioskach omówić ewentualne różnice i przyczyny błędów.

W trakcie wykonywania ćwiczenia może przydać się również aplikacja Flir ONE:

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.flir.flirone