



METODY NUMERYCZNE

Wykład 1.

Wprowadzenie do metod numerycznych

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH,
Katedra Elektroniki, AGH
e-mail: zak@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~zak>

Met.Numer. wykład 1. 2013/14 1



Wprowadzenie do metod numerycznych

Metody numeryczne są działem matematyki stosowanej zajmującym się opracowywaniem metod przybliżonego rozwiązywania problemów matematycznych, których albo nie można rozwiązać metodami dokładnymi albo metody dokładne posiadają tak dużą złożoność obliczeniową, że są praktycznie nieużyteczne

Metody numeryczne zajmują się konstruowaniem algorytmów, których obiektami, tj. danymi, wynikami pośrednimi i wynikami ostatecznymi są **liczby**

Met.Numer. wykład 1. 2013/14 2



Wprowadzenie do metod numerycznych

Cechy charakterystyczne metod numerycznych:

- obliczenia wykonywane są na liczbach przybliżonych
- rozwiązania zagadnień też są wyrażone liczbami przybliżonymi
- wielkość błędu w procesie obliczeń numerycznych jest zawsze kontrolowana

Met.Numer. wykład 1. 2013/14 3



Literatura:

- Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, Metody numeryczne, Podręczniki Akademickie EIT, WNT Warszawa, 1982, 2005
- L.O. Chua, P-M. Lin, Komputerowa analiza układów elektronicznych-algorytmy i metody obliczeniowe, WNT, Warszawa, 1981
- G.Dahlquist, A.Björck, Metody matematyczne, PWN Warszawa, 1983
- Autar Kaw, Luke Snyder

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wkład 1. 2013/14 4



Literatura dodatkowa:

- M.Wciślik, Wprowadzenie do systemu Matlab, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2000
- S. Osowski, A. Cichocki, K.Siwiek, Matlab w zastosowaniu do obliczeń obwodowych i przetwarzania sygnałów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006
- W.H. Press, et al., Numerical recipes, Cambridge University Press, 1986

Met.Numer. wkład 1. 2013/14 5

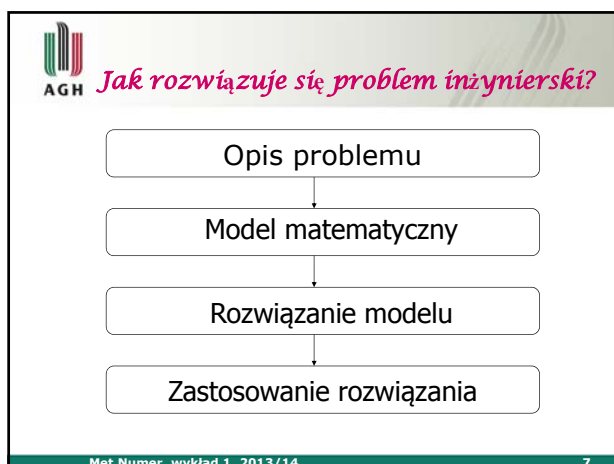


Wprowadzenie do metod numerycznych

Plan

- Rozwiązywanie problemów inżynierskich
- Przegląd typowych procedur matematycznych
- Stało i zmiennoprzecinkowa reprezentacja liczb

Met.Numer. wkład 1. 2013/14 6







Montaż THG




Etap 1. Czop jest zanurzany w mieszaninie suchy lód/alkohol (108 F, około -80 C)

Etap 2. Czop rozszerza się w piasku

Etap 3. Czop-piasta zanurzone w mieszaninie suchy lód/alkohol

Etap 4. Po umieszczeniu w dźwigarze czop-piasta rozszerza się

Met.Numer. wkład 1. 2013/14 10

Pojawił się problem!




Po schłodzeniu, czop „zaciął się” w piasku

Met.Numer. wkład 1. 2013/14 11

Dlaczego?



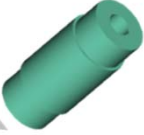
Wymagana jest kontrakcja elementu 0.015" lub więcej.
Czy czop uległ wystarczającemu zwężeniu?



Met.Numer. wkład 1. 2013/14 12



Obliczenia



$$\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T$$

$$D = 12.363''$$

$$\alpha = 6.47 \times 10^{-6} \text{ in/in/}^{\circ}\text{F}$$

$$\Delta T = -108 - 80 = -188^{\circ}\text{F}$$

$$\Delta D = (12.363)(6.47 \times 10^{-6})(-188)$$

$$= -0.01504''$$

Met.Numer. wkład 1. 2013/14

13



Jednostki



$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$$

$$D = 12.363'' \approx 31.4 \text{ cm}$$

$$T_F = \left(\frac{9}{5} T_C + 32 \right)^{\circ}\text{F}$$

$$T = 80^{\circ}\text{F} \approx 26.7^{\circ}\text{C}$$

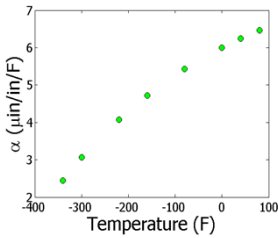
$$\Delta D = 0.01504 \text{ in} = 0.03820 \text{ cm}$$

Met.Numer. wkład 1. 2013/14

14



Czy użyty wzór jest prawidłowy?

$$\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T$$


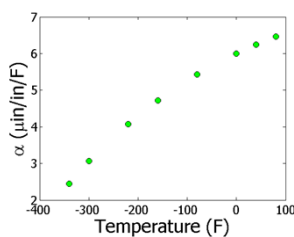
T(°F)	α (in/in/°F)
-340	2.45
-300	3.07
-220	4.08
-160	4.72
-80	5.43
0	6.00
40	6.24
80	6.47

Met.Numer. wkład 1. 2013/14

15

AGH **Rozwiązanie problemu**

Prawidłowy model powinien brać pod uwagę zmieniający się współczynnik rozszerzalności termicznej

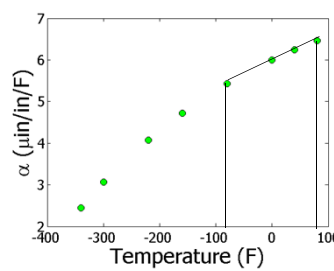


$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T) dT$$

Met.Numer. wkład 1. 2013/14 16

AGH **Czy można oszacować kontrakcję?**

$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T) dT$ $T_a = 80^\circ\text{F}$; $T_c = -108^\circ\text{F}$; $D = 12.363''$



Met.Numer. wkład 1. 2013/14 17

AGH **Dokładne określenie kontrakcji**

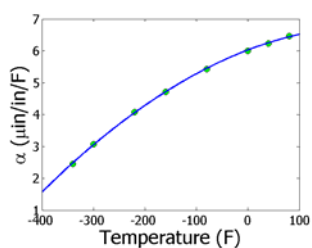
Zmiana średnicy (ΔD) przez oziębianie w mieszaninie lód/alkohol jest dana

$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T) dT$

$T_a = 80^\circ\text{F}$
 $T_c = -108^\circ\text{F}$
 $D = 12.363''$

$\alpha = -1.2278 \times 10^{-5} T^2 + 6.1946 \times 10^{-3} T + 6.0150$

$\Delta D = -0.0137''$ **za mało!!!**



Met.Numer. wkład 1. 2013/14 18



Zastosowanie rozwiązania problemu – wskazówki praktyczne

Jedną z możliwych wskazówek jest aby czop schładzać w ciekłym azocie, który wrze w temperaturze -321°F dużo niższej niż -108°F dla mieszaniny suchy lód/alkohol



$$\Delta D = -0.0244'$$

Met.Numer. wkład 1. 2013/14

19



Podsumowując:

- 1) Stwierdzenie problemu: czop nie obraca się swobodnie
- 2) Modelowanie: stworzenie nowego modelu

$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T) dT$$
- 3) Rozwiązanie: a) użyć metody graficznej b) użyć metod regresji i przeprowadzić całkowanie
- 4) Implementacja: schładzać czop w temperaturze ciekłego azotu.

Met.Numer. wkład 1. 2013/14

20



Procedury matematyczne

- Równania nieliniowe
- Różniczkowanie
- Układ równań liniowych
- Dopasowanie krzywych
 - Interpolacja
 - Regresja
- Całkowanie
- Zwyczajne równania różniczkowe
- Inne zaawansowane procedury:
 - Częstkowe równania różniczkowe
 - Optymalizacja
 - Szybka transformata Fouriera

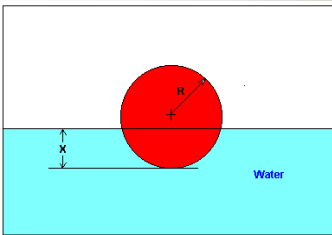
Met.Numer. wkład 1. 2013/14

21

AGH

Równania nieliniowe

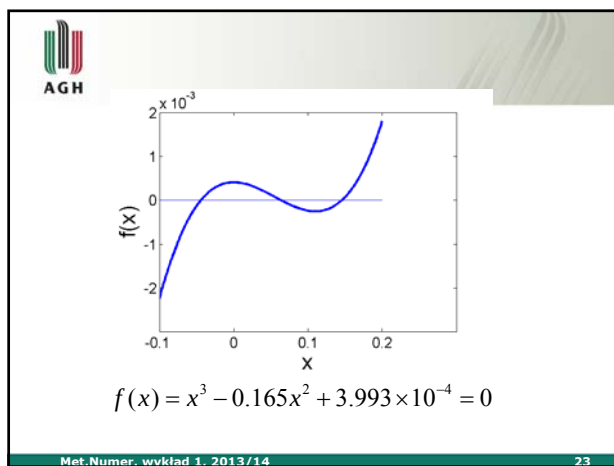
Jak głęboko kula jest zanurzona w wodzie?

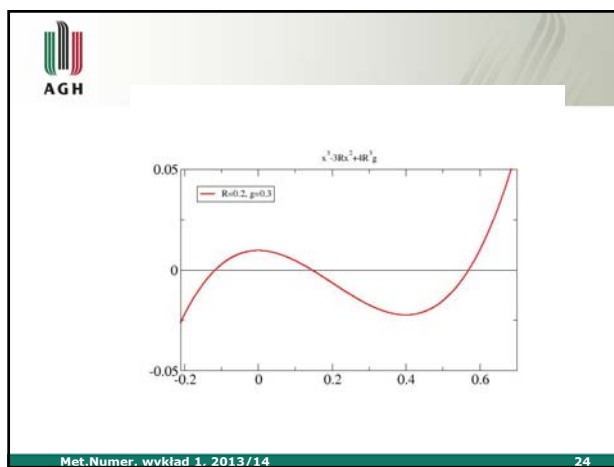


$2R=0.11\text{m}$

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$

Met.Numer. wykład 1. 2013/14 22

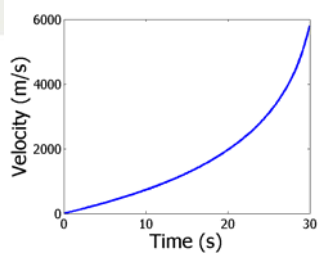




Różniczkowanie

AGH

Jakie jest przyspieszenie w $t=7$ s?

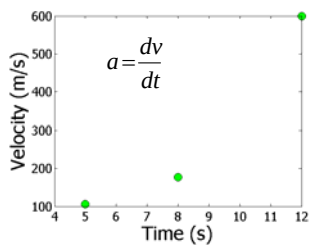



$$v(t) = 2200 \ln\left(\frac{16 \times 10^4}{16 \times 10^4 - 5000t}\right) - 9.8t \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Met.Numer. wykład 1. 2013/14 25

AGH

Czas (s)	5	8	12
V(m/s)	106	177	600

Met.Numer. wykład 1. 2013/14 26

Układ równań liniowych

AGH

Znaleźć profil prędkości, przy założeniu:

Czas (s)	5	8	12
V (m/s)	106	177	600

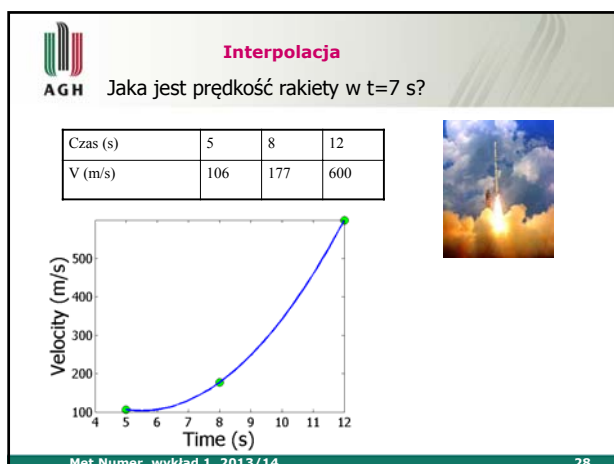


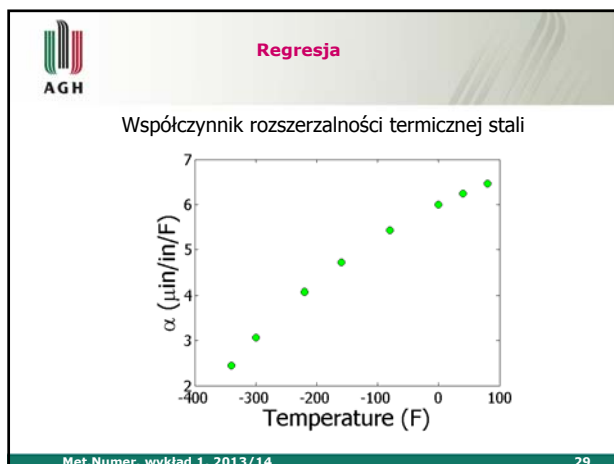
$$v(t) = at^2 + bt + c, \quad 5 \leq t \leq 12$$

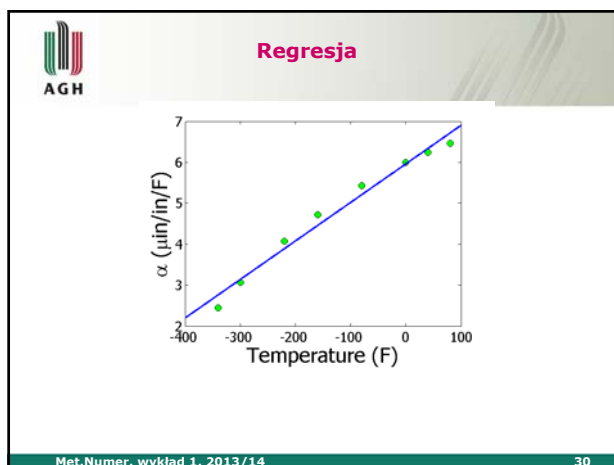
Układ trzech równań liniowych

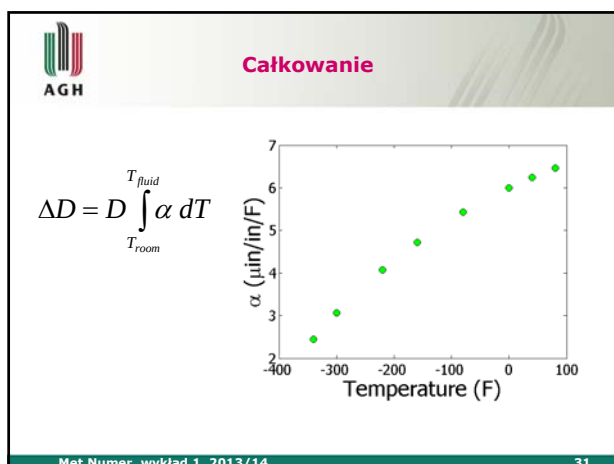
$$\begin{cases} 25a + 5b + c = 106 \\ 64a + 8b + c = 177 \\ 144a + 12b + c = 600 \end{cases}$$

Met.Numer. wykład 1. 2013/14 27









Zwyczajne równania różniczkowe

AGH

Jak długo trzeba chłodzić ciało?

$$mc \frac{d\theta}{dt} = -hA(\theta - \theta_a), \quad \theta(0) = \theta_{room}$$

Met.Numer. wkład 1. 2013/14 32

Co trzeba wiedzieć układając własne algorytmy obliczeniowe?

AGH

Trzeba znać:

- wielkość pamięci operacyjnej komputera
- szybkość wykonywania operacji arytmetycznych i logicznych
- zakres liczb dopuszczalnych podczas obliczeń
- dokładność wykonywania podstawowych działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych

Met.Numer. wkład 1. 2013/14 33



Sposób przedstawiania liczb w pamięci komputera

Liczby są zapamiętywane jako

- stałoprzecinkowe (liczby stałopozycyjne, ang. fixed-point numbers)
- zmiennoprzecinkowe (liczby zmiennopozycyjne, ang. floating-point numbers, fl)

Komputer pracuje wewnętrznie w układzie dwójkowym, a komunikuje się ze światem zewnętrznym w układzie dziesiętnym, stąd **procedury konwersji**.

Jest to źródłem błędów!

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

34



Arytmetyka komputerowa

Reprezentacja liczby dziesiętnej

$$257.76 = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

System dwójkowy (binarny)

$$(1011.0011)_2 = \left(\begin{array}{l} (1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \\ + (0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}) \end{array} \right)_{10} = 11.1875$$

W układzie dwójkowym stosujemy dwie cyfry: 0 i 1, nazywane **bitami**

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

35



Zamiana liczby całkowitej w zapisie dziesiętnym na liczbę w zapisie dwójkowym

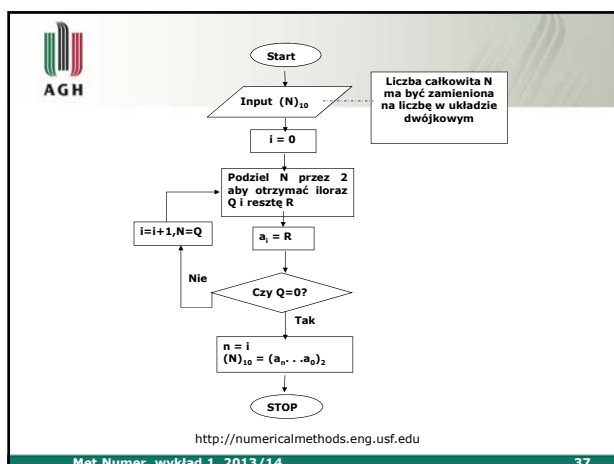
	Iloraz	Reszta
11/2	5	$1 = a_0$
5/2	2	$1 = a_1$
2/2	1	$0 = a_2$
1/2	0	$1 = a_3$

stąd

$$(11)_{10} = (a_3 a_2 a_1 a_0)_2 = (1011)_2$$

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

36



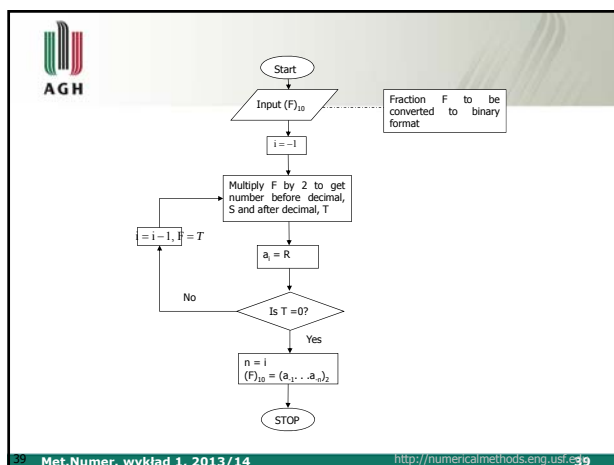
AGH

Zamiana liczby ułamkowej w zapisie dziesiętnym na liczbę w zapisie dwójkowym

	Wynik mnożenia	Po przecinku	Liczba przed przecinkiem
0.1875×2	0.375	0.375	$0 = a_{-1}$
0.375×2	0.75	0.75	$0 = a_{-2}$
0.75×2	1.5	0.5	$1 = a_{-3}$
0.5×2	1.0	0.0	$1 = a_{-4}$

stąd $(0.1875)_{10} = (a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4})_2$
 $= (0.0011)_2$

Met.Numer. wykład 1. 2013/14 38





Zamiana dowolnej liczby w zapisie dziesiętnym na liczbę w zapisie dwójkowym

$$(11.1875)_{10} = (\quad . \quad)_2$$

skoro

$$(11)_{10} = (1011)_2$$

i

$$(0.1875)_{10} = (0.0011)_2$$

otrzymujemy

$$(11.1875)_{10} = (1011.0011)_2$$

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

40



Inne podejście

$$(11.1875)_{10}$$

$$(11)_{10} = 2^3 + 3$$

$$= 2^3 + 2^1 + 1$$

$$= 2^3 + 2^1 + 2^0$$

$$= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= (1011)_2$$

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

41



Inne podejście

$$(0.1875)_{10} = 2^{-3} + 0.0625$$

$$= 2^{-3} + 2^{-4}$$

$$= 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}$$

$$= (.0011)_2$$

$$(11.1875)_{10} = (1011.0011)_2$$

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

42



Problem dokładności

Przykład: Nie wszystkie liczby ułamkowe mogą być przedstawione dokładnie w systemie dwójkowym

	Wynik	Po przecinku	Przed przecinkiem
0.3×2	0.6	0.6	$0 = a_{-1}$
0.6×2	1.2	0.2	$1 = a_{-2}$
0.2×2	0.4	0.4	$0 = a_{-3}$
0.4×2	0.8	0.8	$0 = a_{-4}$
0.8×2	1.6	0.6	$1 = a_{-5}$

$$(0.3)_{10} \approx (a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4}a_{-5})_2 = (0.01001)_2 = 0.28125$$

Dokładność z jaką można przedstawiać liczby zależy od długości słów w komputerze. Zaokrąglanie i obcinanie prowadzi do błędów.

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

43



Struktura liczby zmiennoprzecinkowej

$$x = M \times N^w$$

M-mantysa liczby x

W-wykładnik części potęgowej,

N=2, 10

W zapisie zmiennoprzecinkowym liczba rzeczywista jest przedstawiana za pomocą dwóch grup bitów:

I – tworzy mantysę M, część ułamkowa $\frac{1}{2} < M < 1$

II – tworzy W, liczba całkowita, zakres W decyduje o zakresie liczb dopuszczalnych w komputerze

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

44



Struktura liczby zmiennoprzecinkowej

$$x = M \times N^w$$

Przykład:

Jeżeli w zapisie dwójkowym M określa 5 bitów a W trzy bity, przy czym pierwszy bit określa znak („-” to jeden), to:

$$x = (1)1101 (0)10$$

M W

oznacza liczbę $x = -0,1101 \times 2^{+10}$

czyli:
$$x = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16}\right) \times 2^{+(1 \cdot 2 + 0 \cdot 1)}$$

w zapisie dziesiętnym -3,25

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

45



Struktura liczby zmiennoprzecinkowej

$$x = M \times N^w$$

W tym zapisie można utworzyć tylko niektóre liczby dodatnie w zakresie od 0,0625 do 7,5; liczbę 0 oraz liczby ujemne od -0,0625 do -7,5.

Są pewne liczby, których nie można w tym zapisie przedstawić

Liczba $x=0.2$ (w zapisie dziesiętnym) ma w zapisie dwójkowym nieskończone rozwinięcie równe:

$$x = 0,0011(0011)$$

Najbliższa jej liczba (dla $M=5$ i $W=3$) to $x = 0,001100$

czyli 0,1875

Jest to źródłem błędów wejściowych

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

46



Struktura liczby stałoprzecinkowej

Wagi:

Bity:

znak liczby

wartość bezwzględna liczby

Jeżeli na reprezentację liczby stałoprzecinkowej przeznaczona jest $n+2$ bity (1 bit na znak i $n+1$ bitów na wartość bezwzględną liczby) to struktura ma postać:

$$\text{liczba} = s \cdot \sum_{k=0}^n b_k 2^k$$

gdzie:

$s=1$ lub $s=-1$ (znak liczby)

b_k przyjmuje wartość 0 lub 1 (wartość bezwzględna liczby)

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

47



Struktura liczby stałoprzecinkowej

Wagi:

Bity:

znak liczby

wartość bezwzględna liczby

Na $n+2$ bitach można zapisywać liczby całkowite z przedziału:

$$[-2^{n+1}+1; 2^{n+1}-1]$$

Liczby stałoprzecinkowe są podzbiorem liczb całkowitych. Podzbiór ten jest tym większy im większy jest n .

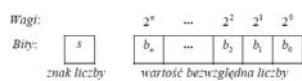
Co to jest nadmiar stałoprzecinkowy?

Met.Numer. wykład 1. 2013/14

48



Struktura liczby stałoprzecinkowej



Języki programowania wysokiego poziomu oferują kilka typów liczb stałoprzecinkowych:

Integer - 16 bitów

LongInt - 32 bity

ShortInt - 8 bitów