

Wykład 4.

Statystyki i estymacja parametrów

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH, Katedra Elektroniki, WIET AGH

Plan:

- Statystyka i estymacja parametrów
- Populacja a próba
- Cechy estymatorów
- Hipoteza statystyczna

Statystyka i estymacja parametrów

Statystyką nazywamy zmienną losową, która jest funkcją próby, czyli skończonej liczby wyników doświadczeń reprezentujących wszystkie możliwe wyniki, których zbiór nazywamy populacją generalną.

Jeżeli rozkład statystyki zależy od wartości pewnego parametru to wartość statystyki może służyć do oszacowania tego parametru i statystykę taką nazywamy **estymatorem** tego parametru.

Przykład: średnia arytmetyczna ocen grupy studentów (31 osób) jest statystyką, która może być użyta do oszacowania wartości oczekiwanej ocen wszystkich studentów; średnia arytmetyczna jest wtedy estymatorem wartości oczekiwanej.

Populacja a próba

Populacja generalna to zbiór dowolnych elementów, nieidentycznych z punktu widzenia danej cechy, który jest obiektem zainteresowania statystyki.

Populacja jest niejako zbiorem wszystkich możliwych wyników danego badania.

Podzbiór populacji, który jest wynikiem skończonej ilości badań danego parametru, nazywamy **próbą statystyczną**.

Populacja a próba

Próba jest reprezentacją („miniaturą”) populacji generalnej. Możemy ją tworzyć używając różnych metod losowań.

Próba n-elementowa

Mała: $n < 30$

Duża $n \geq 30$

Populacja a próba

Przykład: rzut kostką

Populacją generalną są wielokrotne (tj. nieskończone) rzuty kostką sześciocenną. Zmienną losową jest liczba oczek w każdym pojedynczym rzucie.

Rozkład zmiennej losowej:

x	1	2	3	4	5	6
P(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Nie znamy wartości parametru, którym jest wartość oczekiwana μ . Aby go oszacować, wyznaczamy średnią arytmetyczną z prób o liczebności $n=2$ (dwukrotny rzut kostką). Określmy jak dokładnie średnia arytmetyczna przybliża μ .

Populacja a próba

Przyjmijmy jako estymator wartości oczekiwanej średnią arytmetyczną dla wszystkich możliwych prób przy $n=2$.

Próba	śr.	Próba	śr.	Próba	śr.	Próba	śr.	Próba	śr.	Próba	śr.
1 1	1	2 1	1,5	3 1	2	4 1	2,5	5 1	3	6 1	3,5
1 2	1,5	2 2	2	3 2	2,5	4 2	3	5 2	3,5	6 2	4
1 3	2	2 3	2,5	3 3	3	4 3	3,5	5 3	4	6 3	4,5
1 4	2,5	2 4	3	3 4	3,5	4 4	4	5 4	4,5	6 4	5
1 5	3	2 5	3,5	3 5	4	4 5	4,5	5 5	5	6 5	5,5
1 6	3,5	2 6	4	3 6	4,5	4 6	5	5 6	5,5	6 6	6

Populacja a próba

Tworzymy rozkład średniej arytmetycznej prób

$\bar{x}$	$p(\bar{x})$	$\bar{x}$	$p(\bar{x})$
1	1/36	4	5/36
1,5	2/36	4,5	4/36
2	3/36	5	3/36
2,5	4/36	5,5	2/36
3	5/36	6	1/36
3,5	6/36		

Średnia arytmetycznej dwóch prób jest statystyką i estymatorem wielkości oczekiwanej. Czy to jest dobry estymator?

Populacja a próba

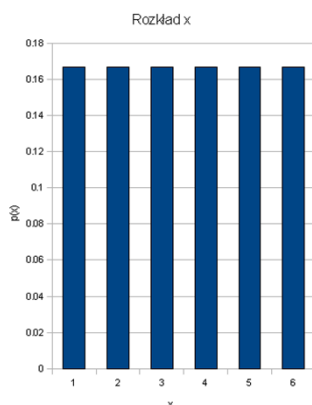
dokładne wartości parametrów rozkładu populacji:

$$\mu = E(x) = \sum x \cdot p(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum (x - \mu)^2 = \frac{1}{6} \cdot (1 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2 - 3,5)^2 + \dots + \frac{1}{6} \cdot (6 - 3,5)^2 = 2,92$$

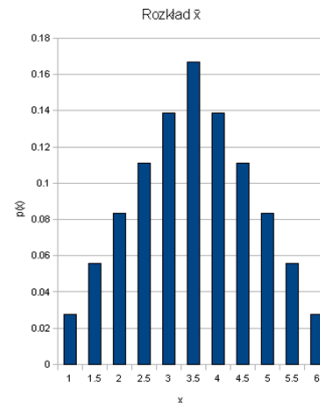
Populacja a próba

rozkład zmiennej losowej x



$$\mu_x = 3,5 \quad \sigma_x^2 = 2,92$$

rozkład średniej arytmetycznej prób

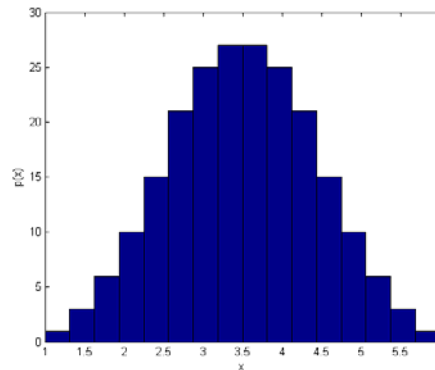


$$\mu_{\bar{x}} = 3,5 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = 1,46 = \frac{\sigma_x^2}{2}$$

Populacja a próba

Dla 3 rzutów rozkład średniej arytmetycznej zmierza do rozkładu Gaussa.

Próba	śr.
1 1 1	1
1 1 2	1,33
1 1 3	1,66
1 1 4	2
1 1 5	2,33
1 1 6	2,66
2 1 1	1,33
2 1 2	1,66
2 1 3	2
2 1 4	2,33
2 1 5	2,66
2 1 6	3
3 1 1	1,66
3 1 2	2
...	...
...	...



$$\mu_x = 3,5 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = 0,97 = \frac{\sigma_x^2}{3}$$

Populacja a próba

Wnioski z przykładu:

1. Średnia arytmetyczna próby $\bar{x}$ ma w przybliżeniu **rozkład normalny**
2. Uogólniając:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

Klasyfikacja losowań

Nieograniczone

- zależne
- niezależne

Warstwowe

- proporcjonalne
- optymalne

Losowanie nieograniczone

Niezależne (ze zwracaniem):

Losujemy jednostka po jednostce z populacji.

żeby **prawdopodobieństwo nie zmieniało się**,
zwracamy jednostkę do populacji.

Liczbę sukcesów opisuje rozkład Bernoulliego.

Zależne (bez zwracania):

Raz wylosowana jednostka **nie bierze** udziału w losowaniu.

Liczbą sukcesów jest rozkład hipergeometryczny.

Losowanie warstwowe

W losowaniu warstwowym populację **dzielimy na kilka** rozłącznych i wewnętrznie jednorodnych **warstw**. Losujemy elementy niezależnie z każdej warstwy. Próba są jednostki wylosowane ze wszystkich warstw.

- Rozmiary miejscowości
- Rodzaje firm w Polsce
- Grupy wiekowe
- Płeć

W losowaniu **proporcjonalnym** losujemy jednostka po jednostce ze wszystkich warstw populacji. Liczba elementów wylosowanych z poszczególnych warstw jest proporcjonalna do liczebności warstwy.

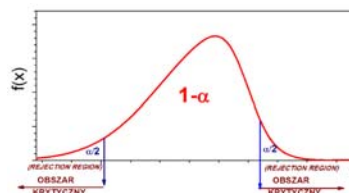
Cechy estymatorów

Estymacja może być **punktowa** lub **przedziałowa**.

Oszacowanie wartości parametru przez wartość estymatora nazywane jest estymacją punktową.

Podstawy metody estymacji przedziałowej opracował polski statystyk Jerzy Spława-Neyman. Istotą metody jest tworzenie takiego przedziału liczbowego, o którym można powiedzieć, że z zadanyim prawdopodobieństwem zawiera w sobie wartość szacowanego parametru.

Prawdopodobieństwo to nazywa się **poziomem ufności** i oznaczane jest $1-\alpha$; przedział nazywa się **przedziałem ufności dla parametru**



Estymator - przykład

Średnia arytmetyczna wzrostu grupy studentów jest statystyką.

Możemy za jej pomocą oszacować wartość oczekiwaną wzrostu wszystkich studentów.

Estymator μ wartości oczekiwanej

$$\mu = E X$$

...jest równy średniej arytmetycznej

$$\bar{x} = x_{sr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

Estymator - przykład

Wyniki:

41,6
41,48
42,34
41,95
41,86
42,18
41,72
42,26
41,81
42,04

Chcąc zmierzyć przewodność cieplną nowego żelazka, firma dokonała pomiarów przy mocy wejściowej 550W, otrzymując 10 rezultatów.

Używając estymacji punktowej, średnia próby wynosi:

$$\bar{x} = 41,924 \left[\frac{Btu}{h \cdot ft \cdot ^\circ F} \right]$$

Błąd standardowy średniej arytmetycznej próby obliczamy jako

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

a skoro σ jest nieznane, możemy je zamienić odchyleniem standardowym $s = 0,284$, aby

otrzymać szacunkowy błąd $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,284}{\sqrt{10}} = 0,0898$

Błąd standardowy wynosi tylko ok. 2‰ średniej, co oznacza że otrzymaliśmy dostatecznie precyzyjny szacunek wartości przewodności cieplnej.

Cechy estymatorów

Estymator nazywamy zgodnym, jeżeli spełnia prawo wielkich liczb:

„Wraz ze wzrostem próby prawdopodobieństwo tego, że estymator parametru a odchyła się od prawdziwej wartości tego parametru mniej od dowolnego $\varepsilon > 0$, dąży do jedności”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n(a) - a| < \varepsilon) = 1$$

Cechy estymatora: Zgodność

Najlepiej, jeżeli estymator spełnia również silne prawo wielkich liczb:

„Prawdopodobieństwo, że wartość estymatora parametru dąży do wartości szacowanego parametru wraz ze wzrostem rozmiarów próby, równało się jedności”

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(a) = a) = 1$$

Cechy estymatora: Nieobciążoność

Estymator parametru θ jest nieobciążony, gdy jego wartość oczekiwana jest, niezależnie od n :

$$E\{T_n(\Theta)\} = \Theta$$

Obciążeniem estymatora nazywamy:

$$B_n \equiv E\{T_n(\Theta)\} - \Theta$$

(dla estymatora nieobciążonego $B_n=0$) !

Hipoteza statystyczna

Hipotezą statystyczną nazywamy **jakiegokolwiek przypuszczenie dotyczące populacji** generalnej:

- Parametrów populacji
- Rozkładu

Reguły postępowania przy weryfikacji postawionych hipotez określamy mianem **testów statystycznych**.

Hipoteza statystyczna

Parametryczna

Precyzuje wartość parametru w rozkładzie populacji generalnej

Sprawdzają hipotezę, że populacja ma określony typ rozkładu

Nieparametryczna

Testy sprawdzające, czy dwie próby pochodzą z jednej populacji

Hipoteza - przykład

Wzrost obywatela Polski jest zmienną losową ciągłą.

- „Wzrost populacji Polski jest określony rozkładem normalnym o parametrach $\mu=1,75m$ i $\sigma=0,1$.” jest hipotezą parametryczną, gdyż określa wartość parametrów oraz ich rozkład.
- „Wzrost populacji Polski jest określony rozkładem normalnym” jest hipotezą nieparametryczną złożoną – nie dotyczy wartości parametrów i określa więcej niż jeden możliwy rozkład

Przebieg procedury weryfikacyjnej

1. Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej

- **Hipoteza zerowa:** hipoteza poddana procedurze weryfikacyjnej, w której zakładamy, że różnica między analizowanymi parametrami lub rozkładami wynosi 0. Wnioskując o parametrach hipotezę zerową zapisujemy:

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2$$

- **Hipoteza alternatywna:** hipoteza przeciwna do weryfikowanej. W zależności od problemu możemy ją zapisać na trzy sposoby:

$$H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \quad H_1 : \theta_1 > \theta_2 \quad H_1 : \theta_1 < \theta_2$$

Przebieg procedury weryfikacyjnej

2. Wybór statystyki testowej

- Wyznaczamy pewną funkcję wyników z próby losowej.
- Wyznaczamy jej rozkład przy założeniu, że hipoteza zerowa jest prawdziwa. Funkcję x_θ nazywamy statystyką testową lub funkcją testową.

$$x_\theta = x(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2)$$

3. Określenie poziomu istotności α

Na tym etapie procedury weryfikacyjnej określamy maksymalne dopuszczalne prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju, który polega na odrzuceniu hipotezy zerowej wtedy, gdy jest ona prawdziwa. Prawdopodobieństwo to jest oznaczane symbolem α i jest nazywane poziomem istotności.

Przebieg procedury weryfikacyjnej

Błędy I i II rodzaju

DECYZJA	H_0 jest prawdziwa	H_0 jest fałszywa
Odrzucić H_0	Błąd I rodzaju $p(\text{błędu I rodzaju}) = \alpha$	Poprawna decyzja
Nie odrzucić H_0	Poprawna decyzja	Błąd II rodzaju $p(\text{błędu II rodzaju}) = \beta$

Na ogół przyjmujemy prawdopodobieństwo błędu bliskie zeru, ponieważ chcemy, aby ryzyko popełnienia błędu było jak najmniejsze. Najczęściej zakładamy poziom istotności $\alpha=0.05$, czasem przyjmuje się np. $\alpha=0.01$; $\alpha=0.1$

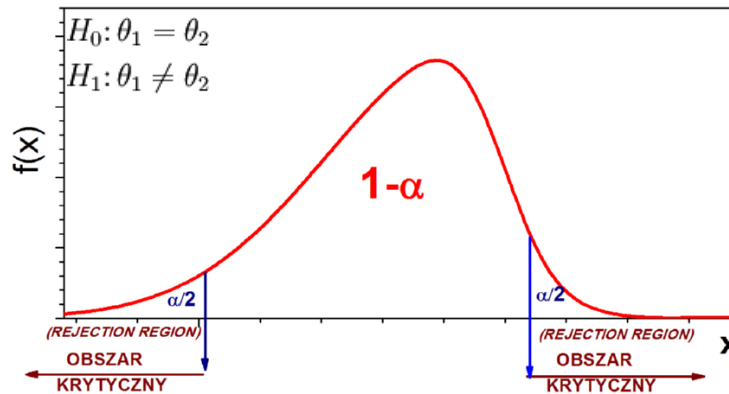
Przebieg procedury weryfikacyjnej

4. Podjęcie decyzji

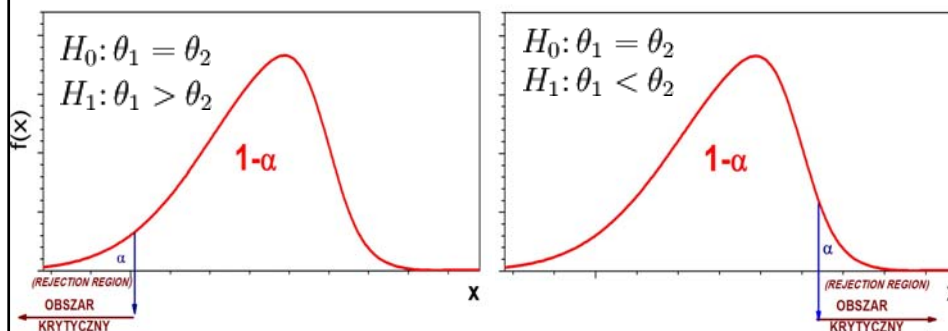
- Wyznaczoną na podstawie próby wartość statystyki porównujemy z **wartością krytyczną testu**.
- Jeżeli wartość znajdzie się w **obszarze krytycznym**, to hipotezę zerową **należy odrzucić** jako nieprawdziwą. Stąd wniosek, że prawdziwa jest hipoteza alternatywna.
- Jeżeli natomiast wartość ta znajdzie się poza obszarem krytycznym, oznacza to, że **brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej**. Stąd wniosek, że hipoteza zerowa może, ale nie musi, być prawdziwa, a postępowanie nie dało **żadnych** dodatkowych informacji uprawniających do podjęcia decyzji o przyjęciu lub odrzuceniu hipotezy zerowej.

DWUSTRONNY OBSZAR KRYTYCZNY test dwuśladowy (*two-tail test*)

Obszar krytyczny- obszar znajdujący się zawsze na krańcach rozkładu. Jeżeli obliczona przez nas wartość statystyki testowej znajdzie się w tym obszarze, to weryfikowaną przez nas hipotezę H_0 odrzucamy. Wielkość obszaru krytycznego wyznacza dowolnie mały poziom istotności α , natomiast jego położenie określone jest przez hipotezę alternatywną.



JEDNOSTRONNY OBSZAR KRYTYCZNY test dwuśladowy (*one-tail test*)

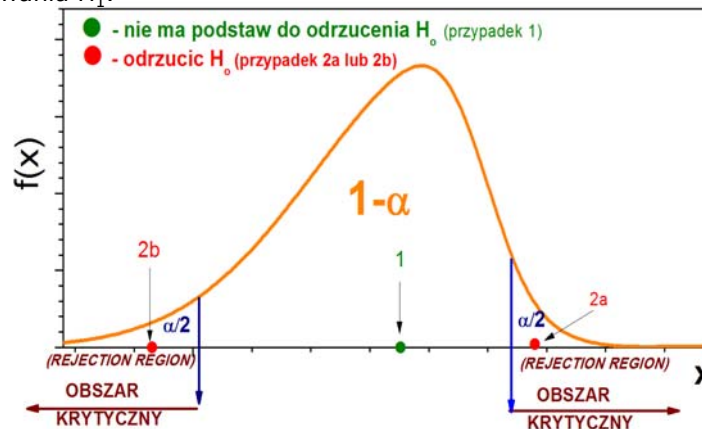


**LEWOSTRONNY OBSZAR
KRYTYCZNY**

**PRAWOSTRONNY OBSZAR
KRYTYCZNY**

DECYZJE

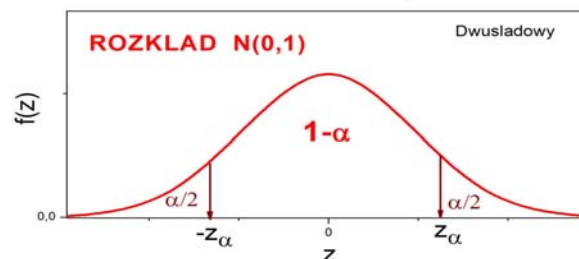
Obszar krytyczny od pozostałej części rozkładu statystyki oddzielony jest przez tzw. **wartości krytyczne testu** czyli wartości odczytane z rozkładu statystyki przy danym α , tak aby spełniona była relacja zależna od sposobu sformułowania H_1 .



TESTY DLA WARTOŚCI ŚREDNIEJ POPULACJI (znane σ)

Przypadek 1. Populacja generalna ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$; **odchylenie standardowe σ jest znane**. Na podstawie n -elementowej próby sprawdzić, hipotezę: $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 - hipotetyczna wartość) wobec hipotezy alternatywnej: $H_1: \mu \neq \mu_0$.

Rozwiązanie: Statystyka testowa: $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ ma rozkład $N(0,1)$



Dla $H_1: \mu > \mu_0$ lub $H_1: \mu < \mu_0$ zastosować **prawostronny** lub **lewostronny** test, odpowiednio.

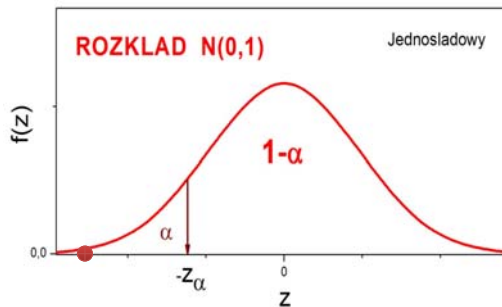


TESTY DLA WARTOŚCI ŚREDNIEJ POPULACJI (znane σ)

Przykład 4.1: Automat formuje płytki ceramiczne o nominalnej wadze 250 g. Wiadomo, że rozkład wagi poszczególnych płytek jest normalny $N(m, 5)$. Kontrola techniczna pobrała losowo 16 płytek, ich średnia masa wyniosła 244 g. Czy można twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje płytki o mniejszej wadze niż przewiduje norma. Na poziomie istotności $\alpha=0,05$ zweryfikować odpowiednią hipotezę statystyczną.

Rozwiązanie:

Hipoteza zerowa $H_0: m = 250$ g; $H_1: m < 250$ g



$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

$$z = (244 - 250) \cdot \sqrt{16} / 5 = -4,8$$

z EXCEL

ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW

$-z_\alpha = -1,64$. Ponieważ:

$$z < -z_\alpha$$

H_0 należy odrzucić na korzyść H_1



TESTY DLA WARTOŚCI ŚREDNIEJ POPULACJI (próba duża)

Przypadek 2.

Populacja generalna ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$ lub dowolny inny; odchylenie standardowe σ jest nieznane. Na podstawie dużej próby $n \geq 30$ sprawdzić hipotezę: $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 -hipotetyczna wartość) wobec hipotezy alternatywnej: $H_1: \mu \neq \mu_0$.

Rozwiązanie: Statystyka testowa:
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n - 1}$$

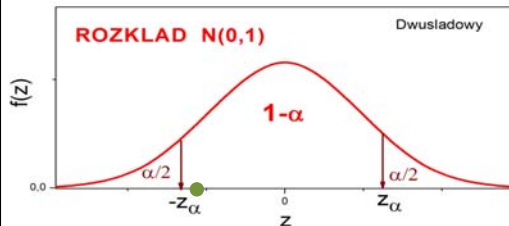
ma rozkład $N(0,1)$, dwustronny obszar krytyczny (dalej postępować jak w Przypadku 1).



TESTY DLA WARTOŚCI ŚREDNIEJ POPULACJI (próba duża)

Przykład 4.2. Badano czas zakończenia reakcji chemicznej. Wykonano $n=60$ powtórzeń, uzyskano $\bar{x}_{sr} = 46$ s, $s=13$ s. Sprawdzić hipotezę, że średni czas zakończenia reakcji wynosi 50s. Przyjąć poziom istotności $\alpha=0,01$.

Rozwiązanie: $H_0 : \mu = 50$ s ; $H_1 : \mu \neq 50$ s ($\mu_0=50$ s). $n=60$,



$$\bar{x} = 46 \text{ s}; s = 13 \text{ s}$$

Statystyka testowa:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n-1}$$

$$z = \frac{46 - 50}{13} \sqrt{59} = -2,36$$

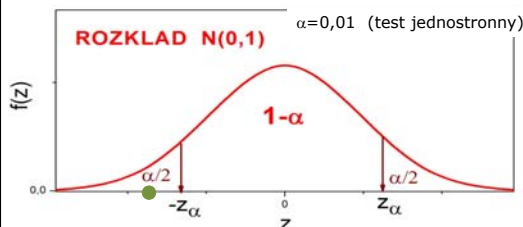
$\alpha=0,01$ stąd $\alpha/2=0,005$, z ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW mamy $z_\alpha=-2,57583$. Wartość $-2,36$ leży poza obrębem obszaru krytycznego, więc nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .



TESTY DLA WARTOŚCI ŚREDNIEJ POPULACJI (próba duża)

Przykład 4.2. Badano czas zakończenia reakcji chemicznej. Wykonano $n=60$ powtórzeń, uzyskano $\bar{x}_{sr} = 46$ s, $s=13$ s. Sprawdzić hipotezę, że średni czas zakończenia reakcji wynosi 50s. Przyjąć poziom istotności $\alpha=0,01$.

Rozwiązanie: $H_0 : \mu = 50$ s ; $H_1 : \mu > 50$ s ($\mu_0=50$ s). $n=60$,



$$\bar{x} = 46 \text{ s}; s = 13 \text{ s}$$

Statystyka testowa:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n-1}$$

$$z = \frac{46 - 50}{13} \sqrt{59} = -2,36$$

Sprawdzając hipotezę, że średni czas reakcji jest większy niż 50 s mamy:

$$H_0 : \mu = 50 \text{ s}; H_1 : \mu > 50 \text{ s} (\mu_0=50 \text{ s}).$$

ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW mamy $z_\alpha=-2,32635$. Wartość $-2,36$ leży w obrębie obszaru krytycznego, a więc H_0 odrzucamy.

WARYFIKACJA HIPOTEZ dla μ :

$H_0 : \mu = \mu_0$ (μ_0 -hipotetyczna wartość)

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ lub: $\mu > \mu_0$ lub: $\mu < \mu_0$

Dane: próba losowa: $P^{(n)}$, poziom istotności: α

**PRÓBA
LOSOWA**
 $p^{(n)}$

Próba duża

Mała
($n < 30$)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

Gdy:
 σ **znane**
(jest to słuszne
też dla małej próby)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n - 1}$$

Gdy:
 σ **nieznane**
TYLKO
dla **dużej** próby

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n - 1}$$

σ **nieznane**
dla **małej**
próby

Z_α $N(0,1)$: ROZKLAD.N.S.ODW
prawdopodobieństwo :

- a) Test dwustronny ($H_1 : \mu \neq \mu_0$) : $\alpha/2$
- b) Test jednostronny ($H_1 : \mu > \mu_0$ lub : $\mu < \mu_0$) : α

t_α : ROZKLAD.T.ODW

Stopnie swobody: $k=n-1$, prawdopodobieństwo:

- a) Test dwustronny ($H_1 : \mu \neq \mu_0$) : α
- b) Test jednostronny ($H_1 : \mu > \mu_0$ lub : $\mu < \mu_0$) : 2α