# Fale materii

**1924- Louis de Broglie – teoria fal materii,**
**1929- nagroda Nobla**

**Hipoteza de Broglie** głosi, że dwoiste korpuskularno – falowe zachowanie jest cechą nie tylko promieniowania, lecz również materii.

W przypadku materii i promieniowania całkowita energia **E** dowolnego obiektu fizycznego jest związaną z częstotliwością $\nu$ fali stowarzyszonej, opisującej jego ruch, następującą relacją:

$$E = h\nu$$

gdzie **h= 6.6×10$^{-34}$ J·s** jest stałą Plancka.

# Fale materii

Pęd tego obiektu związany jest z długością przypisanej mu fali następującą relacją:

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \qquad \textbf{(1)}$$

Definiujemy:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

gdzie $\vec{k}$ jest wektorem falowym o kierunku zgodnym z kierunkiem propagacji fali o długości λ. Wówczas związek (1) ma postać:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

# Fale materii

Wielkości charakterystyczne dla cząstki : **energia E,** oraz **pęd p** są związane poprzez stałą Plancka **h** z wielkościami charakterystycznymi dla ruchu falowego:
**częstotliwość $\nu$,** oraz **długość fali $\lambda$.**

Wyrażenie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

opisuje długość **fali de Broglie.** czyli długość fali materii stowarzyszonej z ruchem cząstki o pędzie p.

# Fale materii

Przykłady:

**a) obiekt makroskopowy**

**piłka o masie m = 1 kg, porusza się z prędkością v = 10m/s, długość fali de Broglie stowarzyszonej z tym obiektem wynosi:**

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.6\times10^{-34}\,J\cdot s}{1.0\cdot 10kg\,\frac{m}{s}} = 6.6\times10^{-35}\,m = 6.6\times10^{-25}\,\overset{o}{\mathbf{A}}$$

**Długość fali stowarzyszonej z ruchem piłki jest tak mała, że nie istnieje układ fizyczny, który umożliwiłby zaobserwować aspekty falowe (interferencja, dyfrakcja) związane z tym ruchem.**

# Fale materii

**b) obiekt mikroskopowy**

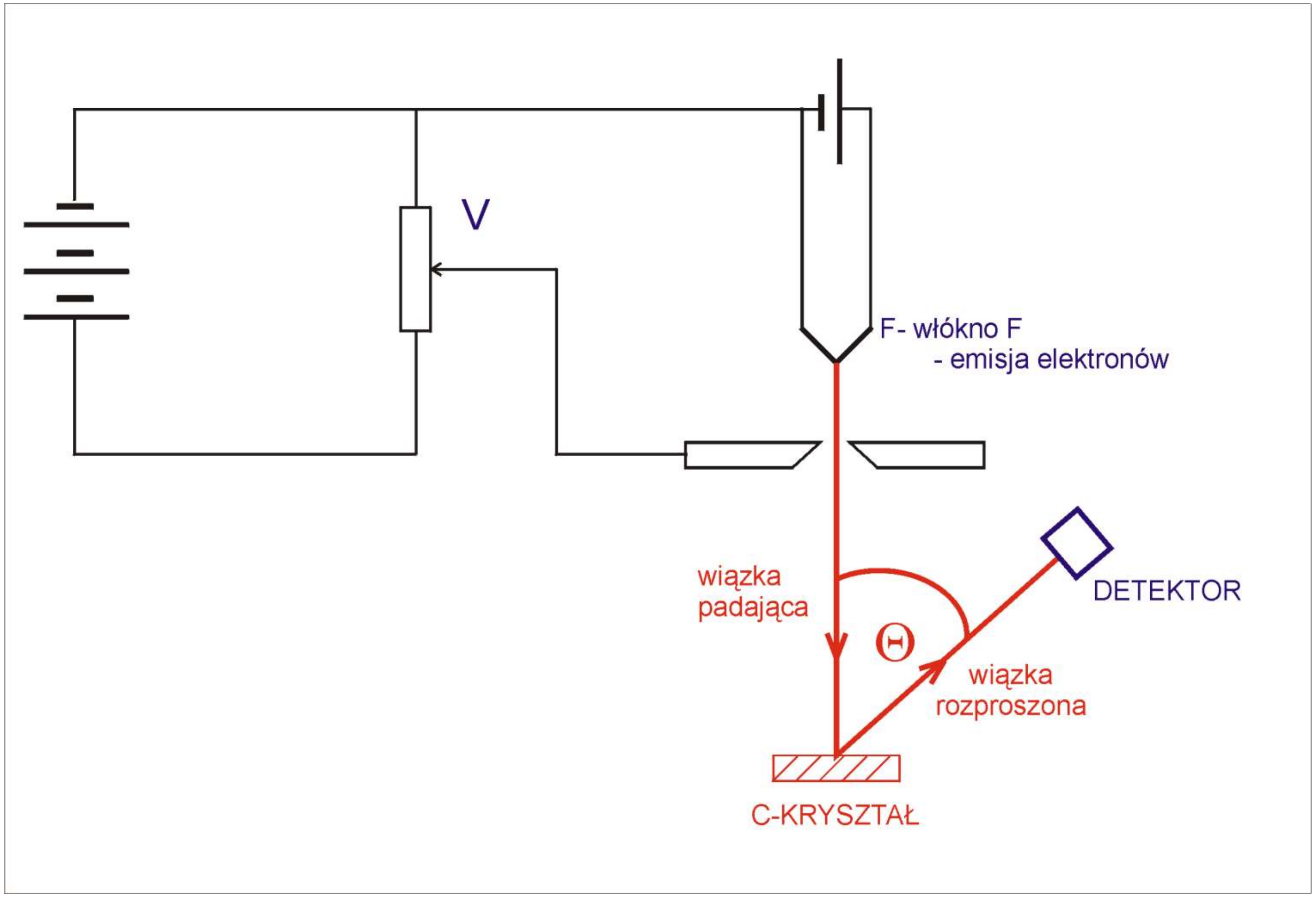
**elektron o masie m=9.1×10$^{-31}$kg posiada energię kinetyczną $E_k$ = 100 eV**

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 1.2\times10^{-10}\,m = 1.2\,\overset{o}{A}$$

**λ jest małe i dlatego w celu zaobserwowania falowych aspektów związanych z ruchem elektronów należy dysponować układem o przesłonach posiadających rozmiary porównywalne z λ≈0.1 nm**

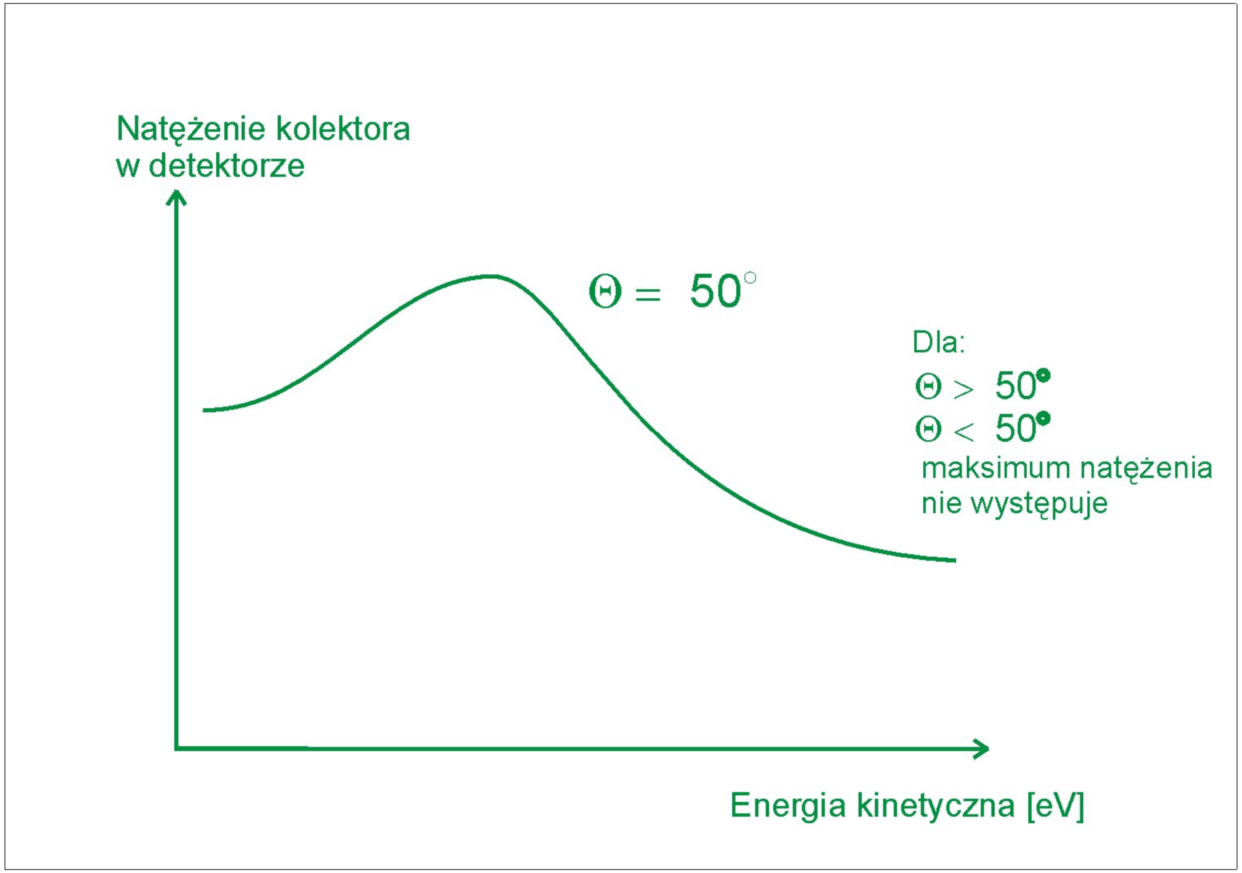
**Takim układem jest sieć krystaliczna.**

# Doświadczenie Davissona – Germera




$\bar{e}$ (elektrony) - są przyspieszane regulowaną różnicą potencjałów

# Doświadczenie Davissona – Germera



# Doświadczenie Davissona – Germera

Kryształ powinien silnie rozpraszać wiązkę elektronów: atomy kryształu stanowią trójwymiarową siatkę dyfrakcyjną. Na wykresie widać maksimum dla $\Theta = 50°$.

Istnienie tego maksimum można wytłumaczyć jedynie jako wynik konstruktywnej interferencji fal rozproszonych na periodycznie rozmieszczonych atomach tworzących płaszczyzny kryształu.

Nie tylko elektrony, lecz wszystkie poruszające się materialne obiekty naładowane i elektrycznie obojętne wykazują cechy falowe w warunkach charakterystycznych dla optyki falowej.
Np. wiązki atomów wodoru i helu ulegają rozproszeniu na monokrysztale fluorku litu, natomiast powolne neutrony na krysztale chlorku sodu (sól kuchenna).

# Fale materii

**Cechy korpuskularne** stają się bardzo wyraźne, gdy badamy zjawiska emisji lub absorpcji .

**Cechy falowe** staja się wyraźne, gdy badamy rozchodzenie się materii i promieniowania.

## Dwoistość falowo – korpuskularna :

Np. stosunek $\frac{\bar{e}}{m}$ (ładunek elektronu/masa elektronu) wyznaczony

z eksperymentu pomiaru śladu jonizacji wskazuje na stosowalność modelu korpuskularnego, natomiast zjawisko dyfrakcji sugeruje model falowy.

## Zasada komplementarności Nielsa Bohra

Modele falowy i korpuskularny wzajemnie się uzupełniają: jeżeli dany pomiar dostarcza dowodu falowego, to w tym samym pomiarze nie da się wykryć cech korpuskularnych i na odwrót.

W obrazie **falowym** natężenie promieniowania:

$$I \propto \overline{E^2}$$

czyli średnia wartość wektora Poyntinga jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali.

W obrazie **fotonowym – korpuskularnym:**

$$I = Nh\nu$$

gdzie N jest średnią liczbą fotonów przechodzących w jednostce czasu przez jednostkowa powierzchnię prostopadłą do kierunku ruchu fotonów.

# Fale materii

**Einstein** sugerował, że średnią wartość kwadratu amplitudy fali, która w teorii elektromagnetyzmu jest proporcjonalna do energii przypadającej na jednostkę objętości, można interpretować, jako miarę średniej liczby fotonów znajdujących się w jednostce objętości.

Uogólnienie hipotezy de Broglie przez **Schrödingera** dało początek mechanice kwantowej.

# Fale materii

Fale de Broglie jest reprezentowana przez funkcje falową, która dla przypadku jednowymiarowego ma postać:

$$\psi(x,t) = A\sin 2\pi(\frac{x}{\lambda} - \nu t) = A\sin(kx - \omega t) \qquad \textbf{(2)}$$

Wyrażenie (2) jest analogiczne do wyrażenia na natężenie pola elektrycznego fali elektromagnetycznej.

$$E(x,t) = E_o \sin(kx - \omega t)$$

# Fale materii

Fala de Broglie jest reprezentowana przez funkcje falową, która dla przypadku jednowymiarowego ma postać:

$$\psi(x,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right) = A\sin(kx - \omega t) \qquad \textbf{(2)}$$

Podstawiając do (2): $\hbar k = p \qquad \hbar\omega = E$

Otrzymujemy:

$$\psi(x,t) = A\sin\frac{1}{\hbar}(px - Et)$$

# Zasada nieoznaczoności

$$\psi(x,t) = A\sin\frac{1}{\hbar}(px - Et)$$

Czy można, przeprowadzając odpowiedni pomiar, jednocześnie określić zarówno pęd **p** jak i położenie **x** cząstki ?

Nie można ich określić dokładniej niż na to pozwala **<u>zasada nieoznaczoności Heisenberga</u>**.

# Zasada nieoznaczoności

Zasada ta stanowi odpowiedź daną przez mechanikę kwantową, w postaci analitycznej jest zapisana, np. dla przypadku jednowymiarowego:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

gdzie : $\Delta p_x$ jest dokładnością pomiaru x-owej składowej pędu

$\Delta x$ jest dokładnością pomiaru położenia

Zasada ta nie jest wynikiem niedokładności przyrządów pomiarowych, ale odnosi się do samego procesu pomiaru. Uwzględnia ona oddziaływanie między obserwatorem i mierzonym obiektem, oddziaływanie to zawsze występuje.

# Zasada nieoznaczoności

Przykład:

a) Obiekt makroskopowy; kula o masie m=50 g

b) Obiekt mikroskopowy; elektron o masie $m=9.1\times10^{-28}$ g

poruszają się z taką samą prędkością v=300 m/s, prędkość ta jest wyznaczona z dokładnością 0,01%.

Pytanie: jak dokładnie możemy wyznaczyć położenie kuli i elektronu?

# Zasada nieoznaczoności

a) p= 15 kg m/s,   $\Delta p = 0{,}0001 \times 15 = 1{,}5 \times 10^{-3}$ kg m/s

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 3 \times 10^{-32}\, m = 3 \times 10^{-22}\, \mathring{A}$$

wielkość ta stanowi $10^{-17}$ średnicy jądra atomowego, jest więc wielkością niemierzalną. Czyli dla obiektów makroskopowych istnienie zasady nieoznaczoności Heisenberga nie nakłada na procedurę pomiarową żadnych ograniczeń.

# Zasada nieoznaczoności

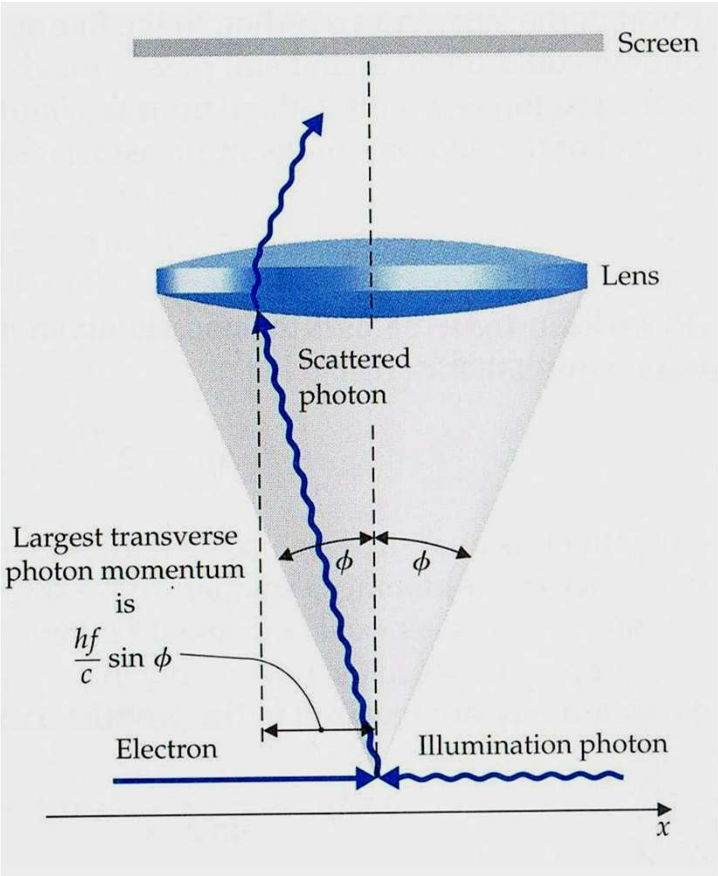
b) $p=2,7\times10^{-28}$ kg m/s $\Delta p=m\Delta v = 2,7\times10^{-32}$ kg m/s

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 0.2cm = 2\times10^{7}\ \mathring{\mathbf{A}}$$

wielkość ta stanowi $10^7$ średnicy jądra atomu.
Dla obiektów mikroskopowych występują w praktyce zawsze ograniczenia w procedurze pomiarowej.

# Mikroskop Heisenberga

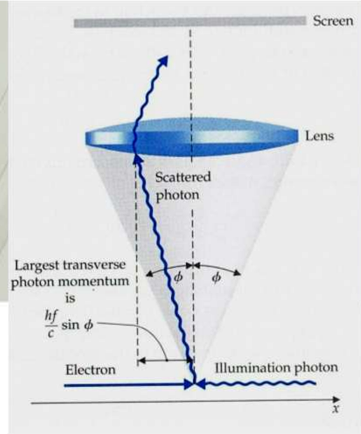
Eksperyment myślowy: wyobraźmy sobie mikroskop, który ma mierzyć jednocześnie położenie x elektronu i składową $p_x$ pędu elektronu.



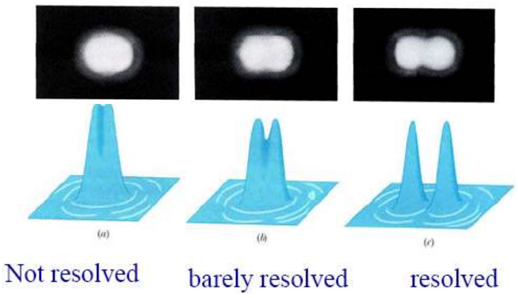

Zakładamy, że elektron porusza się od lewej do prawej ze ściśle zdefiniowanym pędem początkowym $p_x$. Położenie elektronu jest rejestrowane poprzez obserwację fotonu rozproszonego.

Pojedynczy foton o dobrze określonym pędzie (dokładnie znanej długości fali) pada na układ z prawej strony. Moment zderzenia elektronu z fotonem jest tak dobrany, że ma ono miejsce dokładnie pod soczewką mikroskopu. Zderzenie będzie obserwowane, jeżeli foton rozpraszający się na elektronie jest zbierany przez soczewkę i rejestrowany na ekranie.

# Mikroskop Heisenberga




W klasycznej optyce rozdzielczość mikroskopu dana jest:




$$\Delta x \cong \frac{\lambda}{sin\theta}$$

λ-długość fali po rozproszeniu

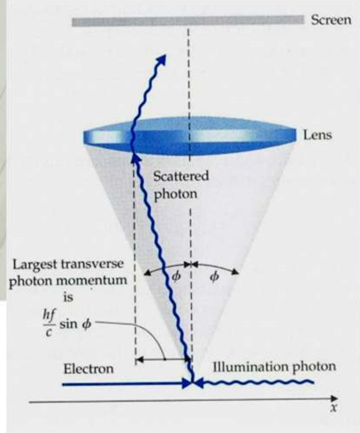
Δx określa jednocześnie możliwość lokalizacji elektronu w przestrzeni i niepewność pomiaru położenia elektronu; aby zmniejszyć tę wielkość, trzeba użyć fali krótszej lub zwiększyć aperturę mikroskopu, tj. kąt θ

Niepewność pędu elektronu (jego składowej x) $\Delta p_x$ po zderzeniu, kiedy mierzone jest jego położenie jest taka sama jak niepewność określenia pędu fotonu. Niepewność w wyznaczeniu pędu fotonu wynika z nieznajomości dokładnego kierunku fotonu przy przechodzeniu przez soczewkę.

$$\Delta p_x \cong 2\frac{hf}{c}sin\theta$$

W przeciwieństwie do Δx, mniejsza długość fali (większa częstotliwość f) i większy kąt θ zwiększają $\Delta p_x$

# Mikroskop Heisenberga




Iloczyn $\Delta x$ i $\Delta p_x$ wynosi:

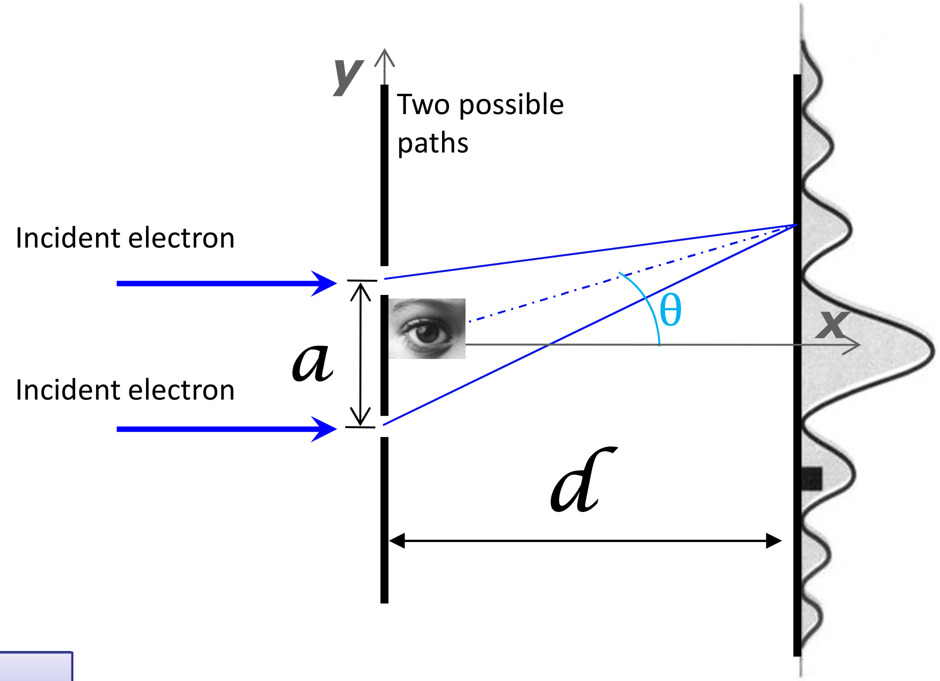
$$\Delta x \Delta p_x \cong \frac{\lambda}{\sin\theta}\frac{2hf}{c}\sin\theta = 2h = 4\pi\hbar$$

Niezależnie od szczególnej konstrukcji urządzenia, wynik ten ma ogólną formę relacji Heisenberga

Zasada nieoznaczoności pozwala nam uniknąć pozornych paradoksów.

# Eksperyment z dwoma szczelinami

Elektrony przechodząc przez układ złożony z pary szczelin dają na ekranie obraz interferencyjny nawet wtedy gdy jest ich tak mało, że w danej chwili czasu przez szczeliny przechodzi tylko jeden elektron. Obraz interferencyjny ulega zniszczeniu przy jakiejkolwiek próbie ustalenia przez którą szczelinę przeszedł elektron.




Warunek interferencji konstruktywnej

$$a \sin\theta_n = n\lambda \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Odległość sąsiednich maksimów na ekranie:

$$d\sin\theta_{n+1} - d\sin\theta_n = \frac{\lambda d}{a}$$

# Eksperyment z dwoma szczelinami

Detektor (nawet oko) ustawiony za szczelinami określa położenie elektronu z dokładnością wystarczającą aby określić przez którą szczelinę przeszedł elektron. Jest to równoważne pomiarowi składowej y położenia elektronu z niepewnością mniejszą niż odległość między szczelinami:

$$\Delta y < \frac{a}{2}$$

Każdy pomiar położenia elektronu (przez rozpraszanie fotonu na elektronie) powoduje przekaz pędu i wprowadza niepewność $\Delta p_y$ w wyznaczeniu pędu elektronu. Z zasady Heisenberga mamy:

$$\boxed{\Delta p_y > \frac{(\hbar/2)}{(a/2)} = \hbar/a}$$

# Eksperyment z dwoma szczelinami

Wprowadzając niepewność pomiaru składowej poprzecznej pędu, automatycznie wprowadziliśmy niepewność miejsca przybycia elektronu na ekranie. Jeżeli elektron przeszedł przez układ szczelin mając pęd podłużny p, wtedy zostanie rozproszony pod kątem:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta p_y}{p} = \frac{\hbar}{ap} = \frac{\lambda}{2\pi a}$$

Ostatecznie, niepewność kątowa przenosi się na niepewność położenia poprzecznego na ekranie:

$$\Delta y = d\Delta\theta = \frac{d\lambda}{2\pi a}$$

Porównując ten wynik z odległością pomiędzy dwoma sąsiednimi maksimami interferencyjnymi:

$$d\Delta\theta = \frac{\lambda d}{a}$$

**widzimy, że detektor zaburzył pomiar i zniszczył obraz interferencyjny**

# Zasada nieoznaczoności czas-energia

Zasada ta wynika z hipotezy de Broglie oraz z pewnych prostych, wspólnych dla wszystkich fal, własności. Odnosi się ona również do pomiaru energii i czasu życia na danym poziomie energetycznym:

$$\Delta E \Delta \tau \geq \frac{\hbar}{2}$$

gdzie: $\Delta E$ jest dokładnością pomiaru energii E

$\Delta \tau$ jest dokładnością pomiaru czasu życia $\tau$

# Zasada nieoznaczoności czas-energia

Dla $E=p^2/2m$

otrzymujemy:

$$\Delta E = \frac{(2p\Delta p)}{2m} = \frac{p\Delta p}{m} = \upsilon \Delta p$$

$$\Delta E = \upsilon \Delta p \geq \upsilon \frac{\hbar/2}{\Delta x} = \frac{\hbar/2}{(\Delta x/\upsilon)} = \frac{\hbar/2}{\Delta t}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

**Time-energy uncertainty relation**

Stan o określonym czasie życia $\Delta t$ nie może mieć dokładnie określonej energii.

# Zasada nieoznaczoności czas-energia

Jeżeli stan wzbudzony atomu ma czas życia τ, to jego energia nie wynosi dokładnie $E_1$; nieoznaczoność energii wynosi:

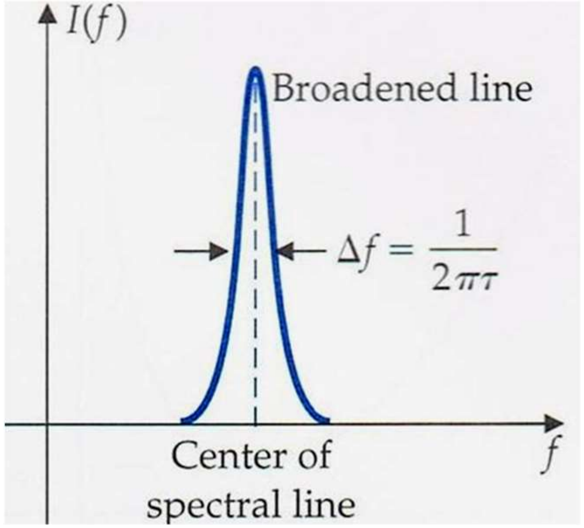
$$\Delta E_1 = \frac{\hbar}{\tau}$$

Ta nieoznaczoność energia ujawnia się gdy podczas przejścia do stanu podstawowego o energii $E_0$; częstotliwość promieniowania emitowanego w wyniku tego procesu:

$$f = \frac{E_1 - E_o}{h}$$

nie jest dokładnie określona

$$\boxed{\Delta f = \frac{\Delta E_1}{h} \cong \frac{1}{2\pi\tau}}$$

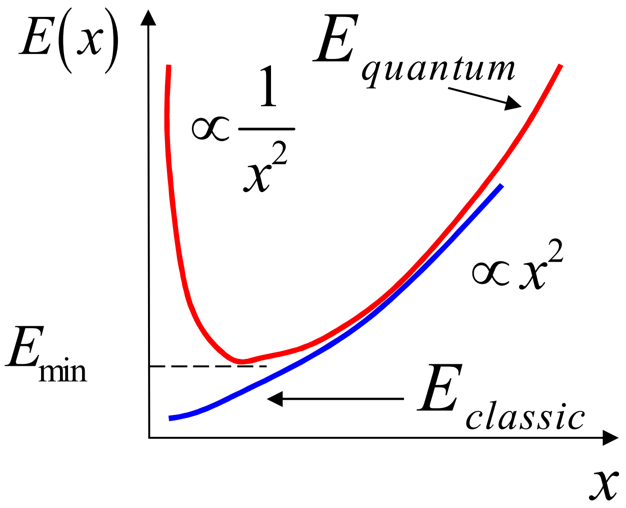



*Poszerzenie* linii spektralnych jest zjawiskiem wynikającym z mechaniki kwantowej

## Energia stanu podstawowego

W pobliżu najniższej energii, gdzie klasycznie $p$=0

$$\Delta p = p$$




Energia oscylatora $$E(x) = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (\Delta x)^2$$

i $$E(a) = \frac{\hbar^2}{8ma^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

Najmniejsza energia nie jest zero

$$E_{min} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Konsekwencją zasady Heisenberga jest występowanie resztkowego ruchu w każdym systemie fizycznym.