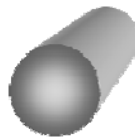


RUCH OBROTOWY- MECHANIKA BRYŁY SZTYWNEJ



Wykład 7

2011/2012, zima

1

MOMENT PĘDU I ENERGIA KINETYCZNA W RUCHU PUNKTU MATERIALNEGO PO OKRĘGU

Definicja
momentu
pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

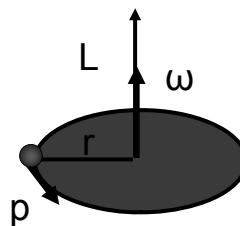
$$L = mrv = mr^2\omega$$

$$L = I\omega$$

$$I = mr^2$$

Moment bezwładności I

Jednostką I jest 1 kg m^2



Energia kinetyczna
ruchu obrotowego

$$E_k = mv^2/2 = mr^2\omega^2/2 = I\omega^2/2$$

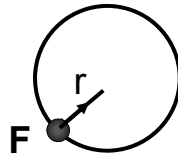
Wykład 7

2011/2012, zima

2

Ruch po okręgu powoduje siła dośrodkowa. Jest to siła centralna.

$$\vec{F} = f(r) \hat{r}$$



Moment siły centralnej względem „centrum” wynosi zero.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r) \hat{r} = r f(r) \hat{r} \times \hat{r} = 0$$

Konsekwencja: Moment pędu jest zachowany

Przez analogię do:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

mamy:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

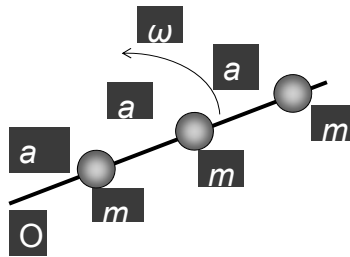
czyli gdy

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

to

$$\vec{L} = \text{const}$$

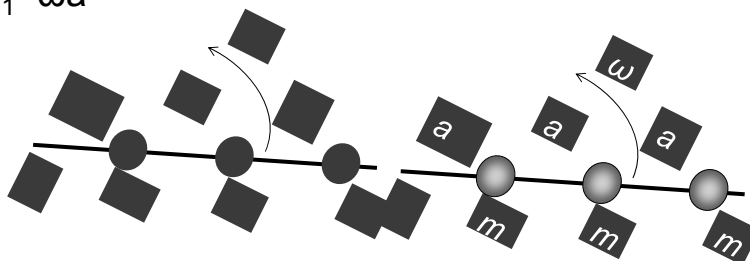
Przykład 1 Trzy punkty materialne o masach m są połączone ze sobą i z osią obrotu trzema cienkimi sznurkami każdy o długości a . Układ obraca się względem osi obrotu z prędkością kątową ω w taki sposób, że punkty materialne znajdują się na jednej prostej. Obliczyć całkowity moment pędu tych trzech punktów materialnych. Przyjąć, że dane są wielkości m , a , ω .



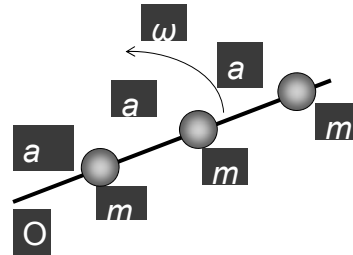
$$v_3 = 3\omega a$$

$$v_2 = 2\omega a$$

$$v_1 = \omega a$$



Całkowity moment pędu układu jest sumą momentów pędu poszczególnych mas



$$L = ma^2\omega + m(2a)^2\omega + m(3a)^2\omega = 14 ma^2 \omega$$

Moment bezwładności I układu też jest sumą momentów bezwładności poszczególnych mas

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

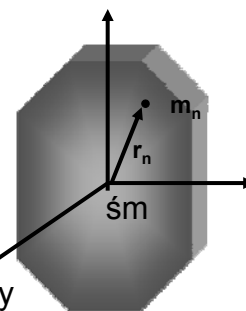
Moment pędu układu punktów materialnych

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N \vec{L}_n = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n$$

ale $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

czyli $\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$

$\vec{\omega}$ jest takie samo dla wszystkich punktów bryły sztywnej



Korzystając z tożsamości wektorowej

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad \text{otrzymujemy}$$

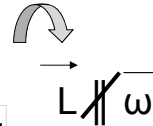
$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n \left[r_n^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_n \right]$$

definicja momentu pędu bryły sztywnej

$$\vec{r}_n = x_n \hat{i} + y_n \hat{j} + z_n \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n \left[r_n^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_n \circ \vec{\omega}) \vec{r}_n \right]$$



$$L_x = \sum_{n=1}^N m_n \left[r_n^2 \omega_x - (\vec{r}_n \circ \vec{\omega}) x_n \right]$$

$$L_y = \sum_{n=1}^N m_n \left[r_n^2 \omega_y - (\vec{r}_n \circ \vec{\omega}) y_n \right]$$

$$L_z = \sum_{n=1}^N m_n \left[r_n^2 \omega_z - (\vec{r}_n \circ \vec{\omega}) z_n \right]$$

$$\vec{r}_n \circ \vec{\omega} = x_n \omega_x + y_n \omega_y + z_n \omega_z$$

$$r_n^2 = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2$$

$$L_x = \sum_{n=1}^N m_n \left[r_n^2 \omega_x - (\vec{r}_n \circ \vec{\omega}) x_n \right]$$

$$L_x = \omega_x \underbrace{\sum_{n=1}^N m_n (r_n^2 - x_n^2)}_{I_{xx}} + \omega_y \underbrace{\left(- \sum_{n=1}^N m_n x_n y_n \right)}_{I_{xy}} + \omega_z \underbrace{\left(- \sum_{n=1}^N m_n x_n z_n \right)}_{I_{xz}}$$

elementy tensora momentu bezwładności

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

TENSOR MOMENTU BEZWŁADNOŚCI BRYŁY SZTYWNEJ

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$L_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$



$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{L} = \tilde{I} \vec{\omega}$$

elementy diagonalne

Wykład 7

2011/2012, zima

11

Tensor momentu
bezwładności

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

definicja elementów
diagonalnych

$$I_{xx} = \sum_{n=1}^N m_n (r_n^2 - x_n^2) = \sum_{n=1}^N m_n (y_n^2 + z_n^2)$$

$$I_{yy} = \sum_{n=1}^N m_n (r_n^2 - y_n^2) = \sum_{n=1}^N m_n (x_n^2 + z_n^2)$$

$$I_{zz} = \sum_{n=1}^N m_n (r_n^2 - z_n^2) = \sum_{n=1}^N m_n (x_n^2 + y_n^2)$$

definicja elementów
pozadiagonalnych

$$I_{xy} = -\sum_{n=1}^N m_n x_n y_n = -\sum_{n=1}^N m_n y_n x_n = I_{yx}$$

$$I_{xz} = -\sum_{n=1}^N m_n x_n z_n = I_{zx}$$

$$I_{yz} = -\sum_{n=1}^N m_n y_n z_n = I_{zy}$$

Tensor jest symetryczny $I_{xy} = I_{yx}$

Wykład 7

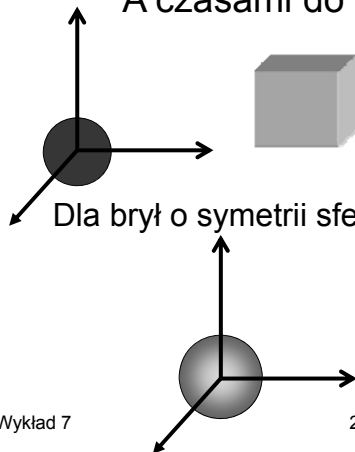
2011/2012, zima

12

Ile jest niezależnych elementów? 9?

Nie, jest 6 elementów bo tensor symetryczny

A czasami do 3 – tensor diagonalny



$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Układ osi głównych

Dla brył o symetrii sferycznej jest tylko jeden element

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

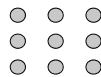
Wykład 7

2011/2012, zima

13

Tensor momentu bezwładności dla ciągłego rozkładu masy

rozkład dyskretny



$$I_{xx} = \sum_{n=1}^N m_n (r_n^2 - x_n^2) = \sum_{n=1}^N m_n (y_n^2 + z_n^2)$$

$$I_{xy} = -\sum_{n=1}^N m_n x_n y_n$$

rozkład ciągły



$$I_{xx} = \int \rho(\vec{r}) (r^2 - x^2) dV$$

$$I_{xy} = -\int \rho(\vec{r}) xy dV$$

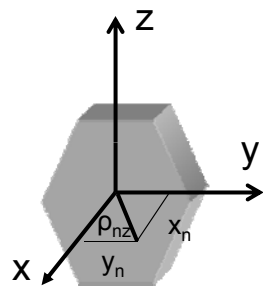
Wykład 7

2011/2012, zima

14

INTERPRETACJA ELEMENTÓW TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

$$I_{zz} = \sum_{n=1}^N m_n (x_n^2 + y_n^2) = \sum_{n=1}^N m_n \rho_{nz}^2$$



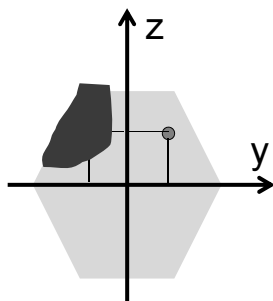
kwadrat odległości od osi OZ

$$x_n^2 + y_n^2 = \rho_{nz}^2$$

Elementy diagonalne mają klasyczną interpretację

INTERPRETACJA ELEMENTÓW TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

$$I_{yz} = -\sum_{n=1}^N m_n y_n z_n$$



$$I_{yz} \neq 0$$

Elementy pozadiagonalne pojawiają się gdy pojawia się asymetria

Moment bezwładności jest tensorem, zatem w ogólnym przypadku wektor momentu pędu nie musi być równoległy do wektora prędkości kątowej.

Przykład 2 Rozważyć układ czterech mas $m_1(a/2, a/2)$, $m_2(-a/2, a/2)$, $m_3(-a/2, -a/2)$ oraz $m_4(a/2, -a/2)$ gdzie $m_1 = m_3 = m = 1$ kg, $m_2 = m_4 = 2$ kg, rozmieszczonych w wierzchołkach kwadratu o boku $a = 2$ cm. Układ mas narysować. (a) Znaleźć tensor momentu bezwładności tego układu mas. Wskazać elementy diagonalne i pozadiagonalne. (b) Zakładając, że podczas obrotu z prędkością kątową $\vec{\omega} = \omega \hat{i}$ wzajemne odległości między masami nie ulegają zmianie, znaleźć wektor momentu pędu tego układu mas i sprawdzić czy jest równoległy do wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$.

$$I_{xx} = \sum_{n=1}^N m_n y_n^2$$

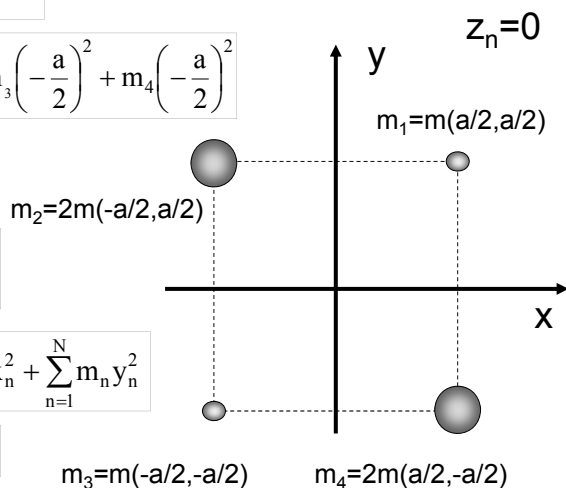
$$I_{xx} = m_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_3 \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + m_4 \left(-\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I_{xx} = \frac{3}{2} m a^2$$

$$I_{yy} = \sum_{n=1}^N m_n x_n^2 = \frac{3}{2} m a^2$$

$$I_{zz} = \sum_{n=1}^N m_n (x_n^2 + y_n^2) = \sum_{n=1}^N m_n x_n^2 + \sum_{n=1}^N m_n y_n^2$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = 3 m a^2$$



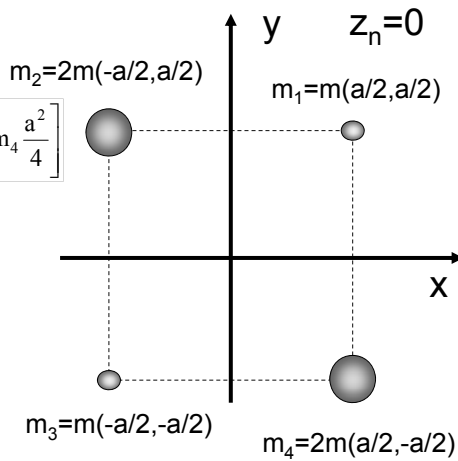
$$I_{xy} = -\sum_{n=1}^N m_n x_n y_n$$

$$I_{xy} = -\left[m_1 \left(\frac{a}{2} \right)^2 + m_2 \left(-\frac{a}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right) + m_3 \left(-\frac{a}{2} \right)^2 - m_4 \frac{a^2}{4} \right]$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} m a^2$$

$$I_{xz} = -\sum_{n=1}^N m_n x_n z_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} m a^2 & \frac{1}{2} m a^2 & 0 \\ \frac{1}{2} m a^2 & \frac{3}{2} m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 m a^2 \end{bmatrix}$$



Tensor momentu
bezwładności

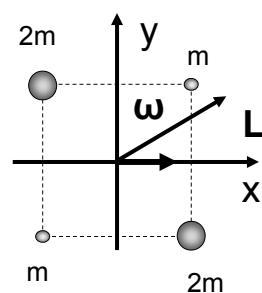
2011/2012, zima

19

Wektor momentu pędu

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} m a^2 & \frac{1}{2} m a^2 & 0 \\ \frac{1}{2} m a^2 & \frac{3}{2} m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 m a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} m a^2 \omega + \left(\frac{1}{2} m a^2 \right) \cdot 0 + 0 \\ \frac{1}{2} m a^2 \omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

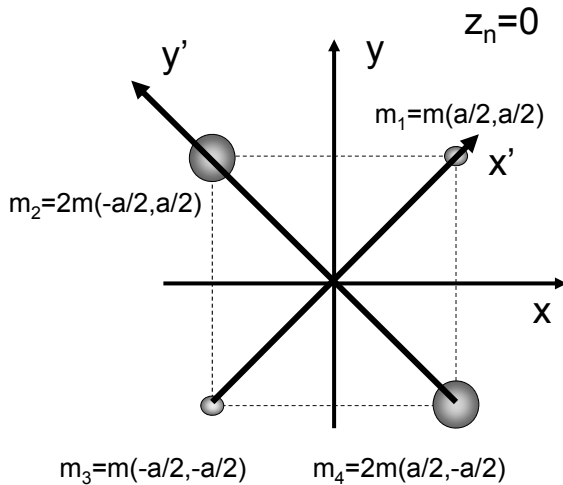


$$\vec{L} = \frac{3}{2} m a^2 \omega \hat{i} + \frac{1}{2} m a^2 \omega \hat{j}$$

Wykład 7

2011/2012, zima

20



W układzie odniesienia XY tensor momentu bezwładności nie jest diagonalny

W układzie odniesienia $X'Y'$ tensor momentu bezwładności jest diagonalny

ZADANIE DOMOWE 7.1

Dwa ciała o masach 200 g i 300 g są połączone lekkim prętem o długości 50 cm. Środek masy układu jest początkiem kartezjańskiego układu współrzędnych. Pręt leży w płaszczyźnie XY i tworzy kąt 20° z osią OY . (a) Znaleźć tensor momentu bezwładności w tym układzie odniesienia. (b) Sprawdzić, czy wektor momentu pędu jest równoległy wektora prędkości kątowej gdy pręt obraca się dookoła osi OX z prędkością kątową ω .

ZADANIE DOMOWE 7.2

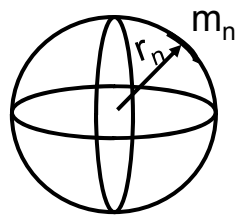
Udowodnić, że:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \sum_{n=1}^N m_n r_n^2$$

Jest to bardzo użyteczne twierdzenie, które pozwala obliczyć np. moment bezwładności powłoki kulistej

Moment bezwładności powłoki kulistej

Powłoka ma masę całkowitą M i promień R



ale $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \sum_{n=1}^N m_n r_n^2$$

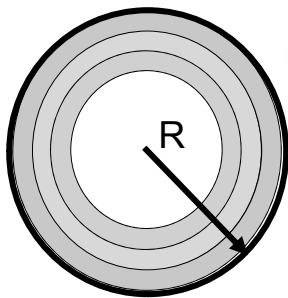
$$3I = 2 \sum_{n=1}^N m_n r_n^2 \quad r_n = R$$

$$3I = 2R^2 \sum_{n=1}^N m_n = 2R^2 M$$

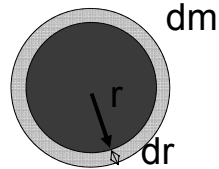


$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

Moment bezwładności kuli



M



dm

$$I_{\text{sfery}} = \frac{2}{3} R^2 M$$

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm$$

$$I = \int dI$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$I = \int \frac{2}{3} r^2 dm = \int \frac{2}{3} r^2 \rho dV$$

$$I = \int_0^R \frac{8\pi}{3} \rho r^4 dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{8\pi}{15} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} R^5 = \frac{2}{5} MR^2$$

Wykład 7

25

Tensor momentu bezwładności wybranych brył w układzie osi głównych

symetria sferyczna

powłoka kulista-sfera

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} MR^2 \end{bmatrix}$$

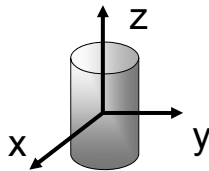
pełna kula

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} MR^2 \end{bmatrix}$$

Wykład 7

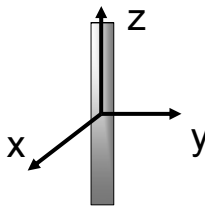
26

symetria cylindryczna



walec o promieniu podstawy R i wysokości H
oraz masie M

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{bmatrix}$$



cieńki pręt o długości L i masie M

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{12}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wykład 7

2011/2012, zima

27

ZADANIE DOMOWE 7.3

Zapoznać się z Tabelą 11.2 str.274 podręcznika HWR-1.
Przeanalizować momenty bezwładności brył sztywnych tam
umieszczonych.

Wykład 7

2011/2012, zima

28

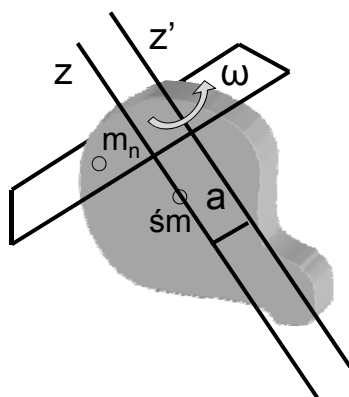
ZADANIE DOMOWE 7.4

Znaleźć (w układzie osi głównych) tensor momentu bezwładności:

- (a) obręczy o promieniu R i masie M
- (b) pełnego dysku o promieniu R i masie M
- (c) prostokąta o bokach a i b oraz masie M

ZADANIE DOMOWE 7.5 – dla ambitnych

Znaleźć (w układzie osi głównych) tensor momentu bezwładności walca o promieniu podstawy R i wysokości H oraz masie M

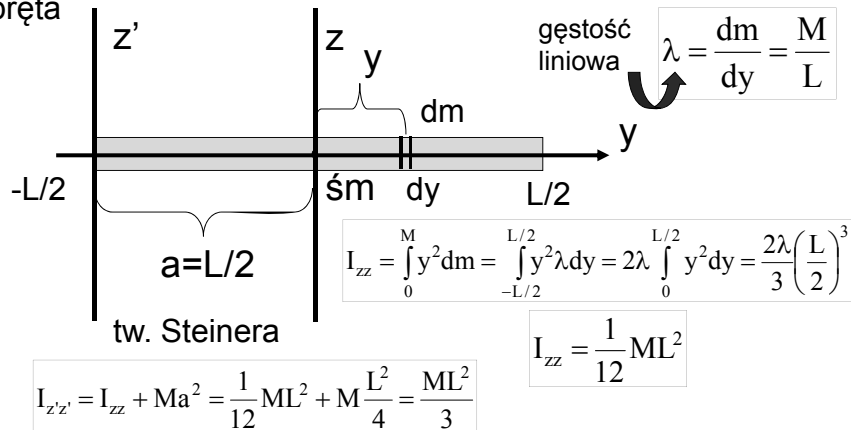
**Twierdzenie o osiach
równoległych – twierdzenie
Steinera**


Jeżeli oś z' jest równoległa do osi z , to

$$I_{z'z'} = I_{zz} + Ma^2$$

a jest odległością pomiędzy osiami

Przykład 3 Obliczyć moment bezwładności jednorodnego pręta o masie M i długości L względem osi przechodzącej przez (a) środek masy pręta (b) przez jeden z końców pręta



ZADANIE DOMOWE 7.6

Moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez koniec pręta można obliczyć nie korzystając z twierdzenia o osiach równoległych (tw. Steinera). Pokazać, że prawidłowy wynik otrzymamy poprzez prostą zmianę granic całkowania.

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu obrotowym

Energię kinetyczną bryły sztywnej obracającej się dookoła nieruchomego środka masy nazywamy energią rotacyjną i wyrażamy wzorem:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_n m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_n m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2$$

korzystając z tożsamości wektorowej

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \circ \vec{c})(\vec{b} \circ \vec{d}) - (\vec{a} \circ \vec{d})(\vec{b} \circ \vec{c})$$

znajdujemy

$$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \circ \vec{r})^2$$

Energię kinetyczną (rotacyjną) bryły sztywnej o dowolnym kształcie zapisujemy jako:

$$E_k = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2\omega_x \omega_y I_{xy} + 2\omega_y \omega_z I_{yz} + 2\omega_z \omega_x I_{zx})$$

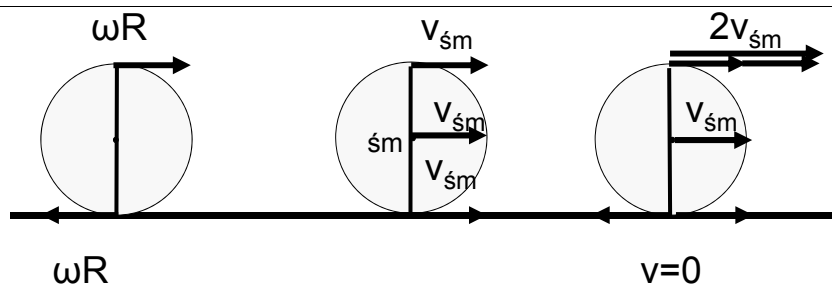
dla brył o symetrii sferycznej

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$$

$$E_k = \frac{1}{2} I (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

TOCZENIE BEZ POŚLIZGU

Toczenie bez poślizgu jest specyficznym rodzajem ruchu bryły sztywnej, będącym złożeniem ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy



ωR
ruch obrotowy
wokół osi
przechodzącej
przez środek
masy

ruch postępowy

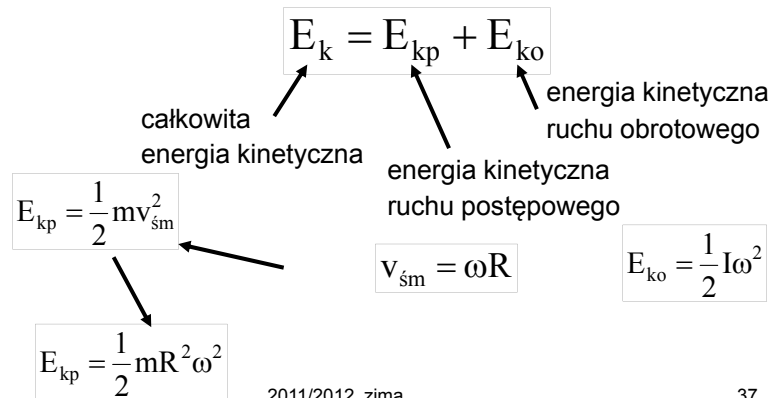
$$v_{\text{śm}} = \omega R$$

$v=0$
toczenie bez
poślizgu jako
złożenie ruchów

Przyczyną toczenia bez poślizgu jest siła tarcia statycznego

$$a_{\text{śm}} = \varepsilon R$$

Przykład 4 Obliczyć energię kinetyczną toczących się bez poślizgu brył: a) walca b) kuli c) cienkiej obręczy. Wszystkie bryły mają tę samą masę $m=1\text{ kg}$ i tę samą prędkość liniową środka masy $v_{\text{śm}}=10\text{ m/s}$



$$I_{\text{walca}} = \frac{1}{2} m R^2$$

walca

$$E_{kw} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v_{\text{śm}}^2$$



$$I_{\text{kuli}} = \frac{2}{5} m R^2$$

kuli

$$E_{kk} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{5} m R^2 \omega^2 = \frac{7}{10} m v_{\text{śm}}^2$$



$$I_{\text{obr}} = m R^2$$

obróczy

$$E_{kobr} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = m v_{\text{śm}}^2$$

$$E_{\text{kobróczy}} > E_{\text{kwalca}} > E_{\text{kkuli}}$$

ZADANIE DOMOWE 7.7

Pod górę równi pochyłej wtaczają się: kula i walec. Obie bryły u podstawy równi miały tę samą prędkość środka masy. Która z brył wtoczy się wyżej?

RÓWNANIA RUCHU BRYŁY SZTYWNEJ – RÓWNANIA EULERA

W układzie związanym ze środkiem masy bryły, czyli w układzie obracającym się razem z bryłą (w układzie nieinercyjnym)

wypadkowy
moment siły

$$\vec{\tau} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_i = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_r + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

zmiana momentu pędu
w układzie inercyjnym

zmiana momentu
pędu w układzie
nieinercyjnym

Założenie: układ osi głównych:

$$L_x = I_{xx} \omega_x$$

$$L_y = I_{yy} \omega_y$$

$$L_z = I_{zz} \omega_z$$

Równania Eulera

$$\tau_x = I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_y \omega_z \quad \text{gdy } I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$$

$$\tau_y = I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_x \omega_z$$

$$\tau_z = I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} + (I_{yy} - I_{xx}) \omega_x \omega_y$$



$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\epsilon}$$

**II zasada dynamiki
dla ruchu
obrotowego**

Wykład 7

2011/2012, zima

Precesja swobodna

$$\vec{\tau} = 0$$



$$0 = I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_y \omega_z$$

$$0 = I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_x \omega_z$$

$$0 = I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} + (I_{yy} - I_{xx}) \omega_x \omega_y$$

Kula: $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$

$$0 = I \frac{d\omega_x}{dt}$$

$$0 = I \frac{d\omega_y}{dt}$$

$$0 = I \frac{d\omega_z}{dt}$$



$$\omega_x = \text{const}$$

$$\omega_y = \text{const}$$

$$\omega_z = \text{const}$$



$$\vec{\omega} = \text{const}$$

Wykład 7

2011/2012, zima

42

ZASADA ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU

W układzie inercyjnym,
wypadkowy moment sił
zewnętrznych

$$\vec{\tau}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

zmiana momentu pędu
bryły sztywnej

Jeżeli $\vec{\tau}_{\text{wyp}} = 0$ to $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ czyli $\vec{L} = \text{const}$
moment pędu jest zachowany

***Zasada zachowania momentu
pędu***

Ilustracja zasady zachowania momentu pędu



- Moment pędu $L = I \omega$
- Moment bezwładności I opisujący rozkład masy obiektu $I = (\text{masa}) \times (\text{odległość od osi obrotu})^2$ maleje, to prędkość kątowa ω rośnie

Wykład 7

2011/2012, zima

45

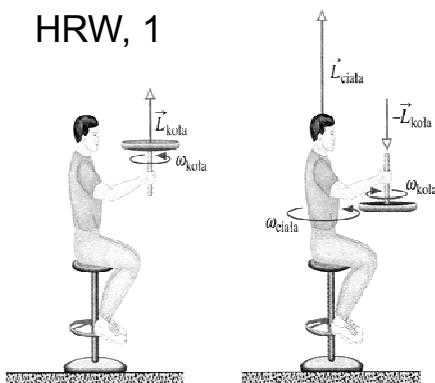
Wydział EAIiE

Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

Przykład 5 Na rysunku przedstawiono studenta siedzącego na stołku obrotowym. Student pozostaje w spoczynku, trzymając w ręku koło rowerowe, które ma moment bezwładności $I_k = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ względem swojej osi. Koło

HRW, 1



obraca się z prędkością kątową $\omega_{\text{koła}} = 3,9$ obrotów/s. W pewnej chwili student obraca koło w wyniku czego student, stołek i środek masy koła zaczynają się obracać razem wokół osi obrotu stołka. Moment bezwładności tego ciała złożonego wynosi $I_{\text{ciała}} = 6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Obliczyć prędkość kątową $\omega_{\text{ciała}}$ po obróceniu koła. W jakim kierunku obraca się student wraz z kołem?

Wykład 7

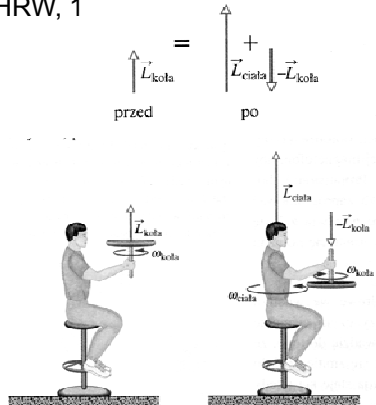
2011/2012, zima

46

Rozwiązanie:

z zasady zachowania momentu pędu

HRW, 1



$$\vec{L}_{\text{przed}} = \vec{L}_{\text{po}}$$

$$L_{\text{koło}} = L_{\text{ciał}} - L_{\text{koło}}$$

$$L_{\text{ciał}} = 2L_{\text{koło}}$$

$$\omega_{\text{ciał}} I_{\text{ciał}} = 2\omega_{\text{koło}} I_{\text{koło}}$$

$$\omega_{\text{ciał}} = 2\omega_{\text{koło}} \frac{I_{\text{koło}}}{I_{\text{ciał}}}$$

Wykład 7

2011/2012, zima

47

Porównanie podstawowych wielkości fizycznych i wzorów

Ruch postępowy (stały kierunek)		Ruch obrotowy (stała oś obrotu)	
położenie	x (m)	położenie katowe	α (rad)
prędkość liniowa v (m/s)	$v = \frac{dx}{dt}$	prędkość katowa ω (rad/s)	$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$
przyspieszenie liniowe a (m/s ²)	$a = \frac{dv}{dt}$	przyspieszenie katowe ε (rad/s ²)	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
masa	m (kg)	moment bezładności	I (kg m ²)

Wykład 7

2011/2012, zima

48

Porównanie podstawowych wielkości fizycznych i wzorów cd.

siła F (N)	$\vec{F} = m \vec{a}$	moment siły τ (N m)	$\vec{\tau} = I \vec{\varepsilon}$
pęd p (kg m/s)	$\vec{p} = m \vec{v}$	moment pędu L (kg m ² s)	$\vec{L} = I \vec{\omega}$
energia kinetyczna E_k (J)	$E_k = \frac{m}{2} v^2$	energia kinetyczna E_k (J)	$E_k = \frac{I}{2} \omega^2$
uogólniona zasada dynamiki	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	uogólniona zasada dynamiki	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

PODSUMOWANIE

- ☐ Do opisu ruchu obrotowego bryły sztywnej używamy wektorów: momentu pędu, wektor momentu siły i prędkości kątowej. Wprowadzamy również pojęcie rotacyjnej energii kinetycznej.
- ☐ Wektory momentu pędu i prędkości kątowej nie muszą być do siebie równoległe, bo $\vec{L} = \tilde{I} \vec{\omega}$ gdzie $\tilde{I}$ jest tensorem momentu bezwładności
- ☐ Postać tensora momentu bezwładności ma ścisły związek z symetrią bryły sztywnej i wybranym układem odniesienia
- ☐ Równania Eulera opisują dynamikę bryły sztywnej