

Wykład 3.

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH

Plan

- Aproksymacja
- Interpolacja wielomianowa
- Przykłady

Aproksymacja

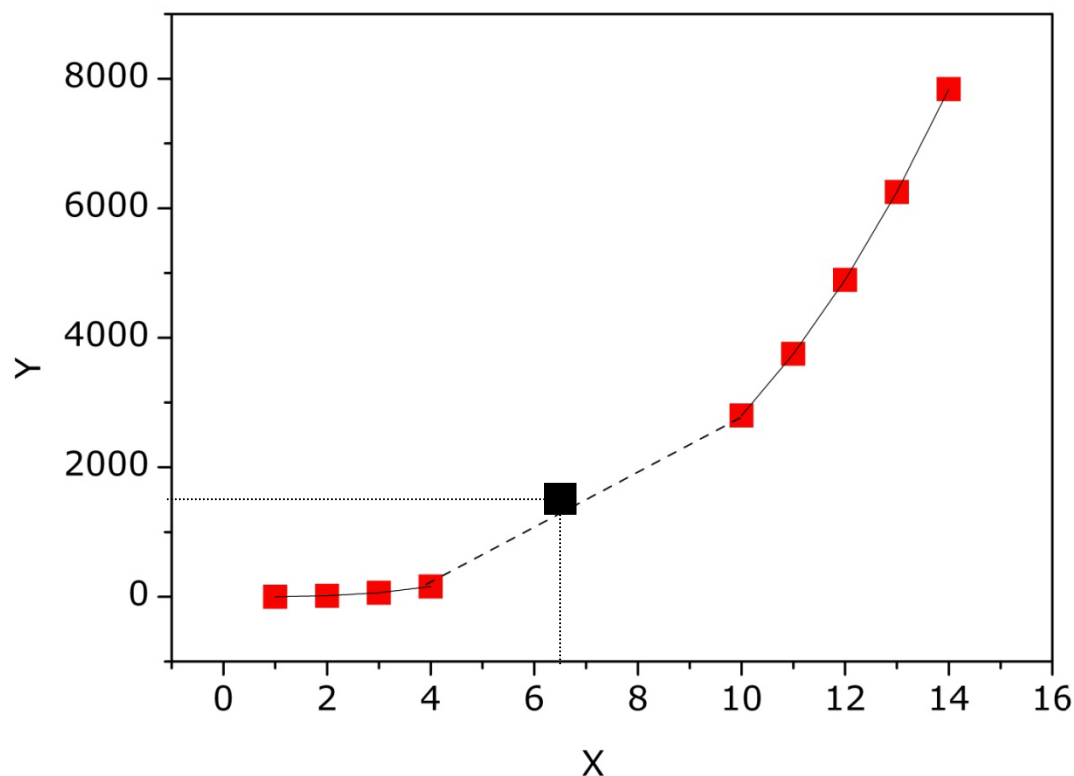
Metody numeryczne zajmują się rozwiązywaniem zadań matematycznych za pomocą działań arytmetycznych. Zachodzi zatem potrzeba **przybliżania** wielkości nie arytmetycznych wielkościami arytmetycznymi i badania **błędów** wywołanych takimi przybliżeniami. Wybór przybliżenia zależy od tego, którym z możliwych **kryteriów** posłużymy się w ocenie skuteczności danego przybliżenia.

Jaki jest dopuszczalny błąd wyniku?

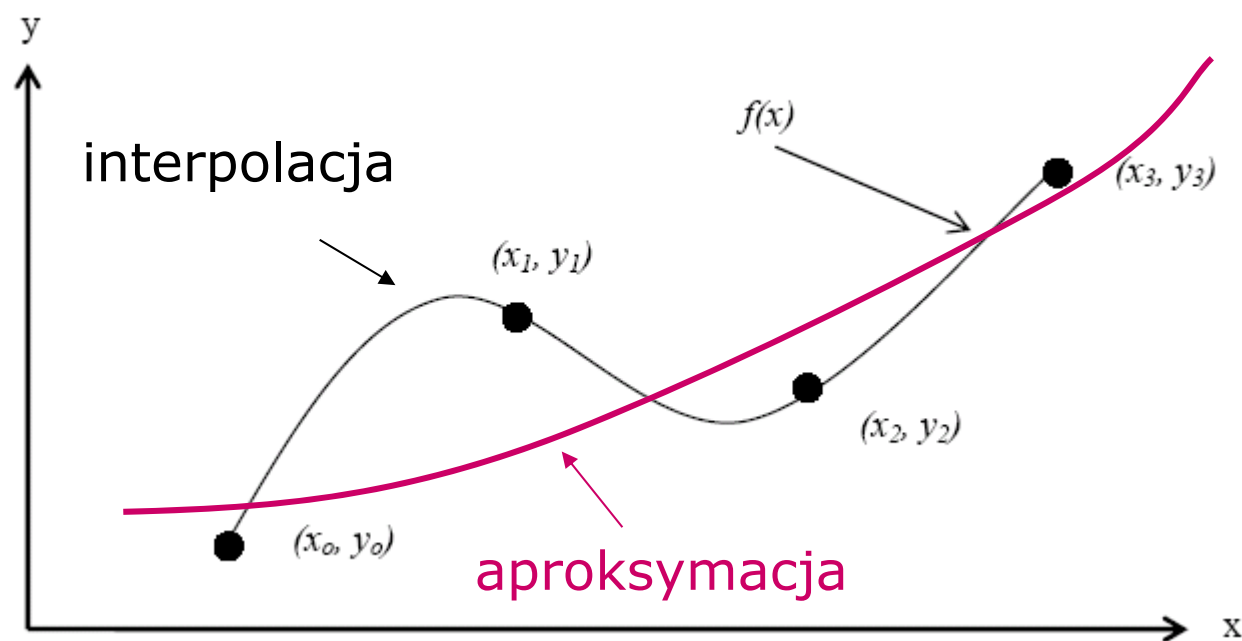
Jak szybko można otrzymać rozwiązanie – jaka jest szybkość zbieżności danej metody, np. procesu iteracyjnego?

Co to jest interpolacja ?

Dane są punkty $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Znaleźć nieznaną wartość y dla dowolnego x .



Różnica pomiędzy aproksymacją i interpolacją



Aproksymacja

Chcemy przybliżyć funkcję $f(x)$ kombinacją (najczęściej liniową) funkcji należących do pewnej szczególnej klasy.

Klasy funkcji:

$\{x^n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) dla N pierwszych wyrazów szeregu Taylora

$\{p_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots$) ogólniej: $p_n(x)$ jest wielomianem stopnia n

$\{\sin(nx), \cos(nx)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) wielomiany trygonometryczne

Największe znaczenie posiada aproksymacja wielomianowa

Aproksymacja

Aproksymacja **liniowa** funkcji $f(x)$

$$f(x) \approx a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \dots + a_m g_m(x)$$

klasy funkcji: $\{g_n(x)\} \ (n = 0, 1, \dots)$

współczynniki stałe: $a_i \ (i = 0, 1, \dots, m)$

Przybliżenia liniowe stosuje się ponieważ badanie aproksymacji kombinacjami nieliniowymi funkcji przybliżających jest bardzo trudne jak analiza większości zagadnień nieliniowych.

Czasami stosuje się przybliżenia wymierne:

$$f(x) \approx \frac{a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \dots + a_m g_m(x)}{b_0 g_0(x) + b_1 g_1(x) + \dots + b_k g_k(x)}$$

Kryteria wyboru stałych współczynników $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$

Trzy typy przybliżeń o dużym znaczeniu

- **przybliżenie interpolacyjne**

współczynniki są tak dobrane, aby w punktach

$$x_i (i = 1, 2, \dots, p)$$

funkcja przybliżająca wraz z jej pierwszymi r_i pochodnymi (r_i jest liczbą całkowitą nieujemną) była zgodna z $f(x)$ i jej pochodnymi (z dokładnością do błędów zaokrągleń)

Kryteria wyboru stałych współczynników $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$

- **przybliżenie średniokwadratowe**

szukamy minimum wyrażenia będącego całką z kwadratu różnicy pomiędzy $f(x)$ i jej przybliżeniem w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ lub sumą ważoną kwadratów błędów rozciągniętą na zbiór dyskretny punktów z przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$

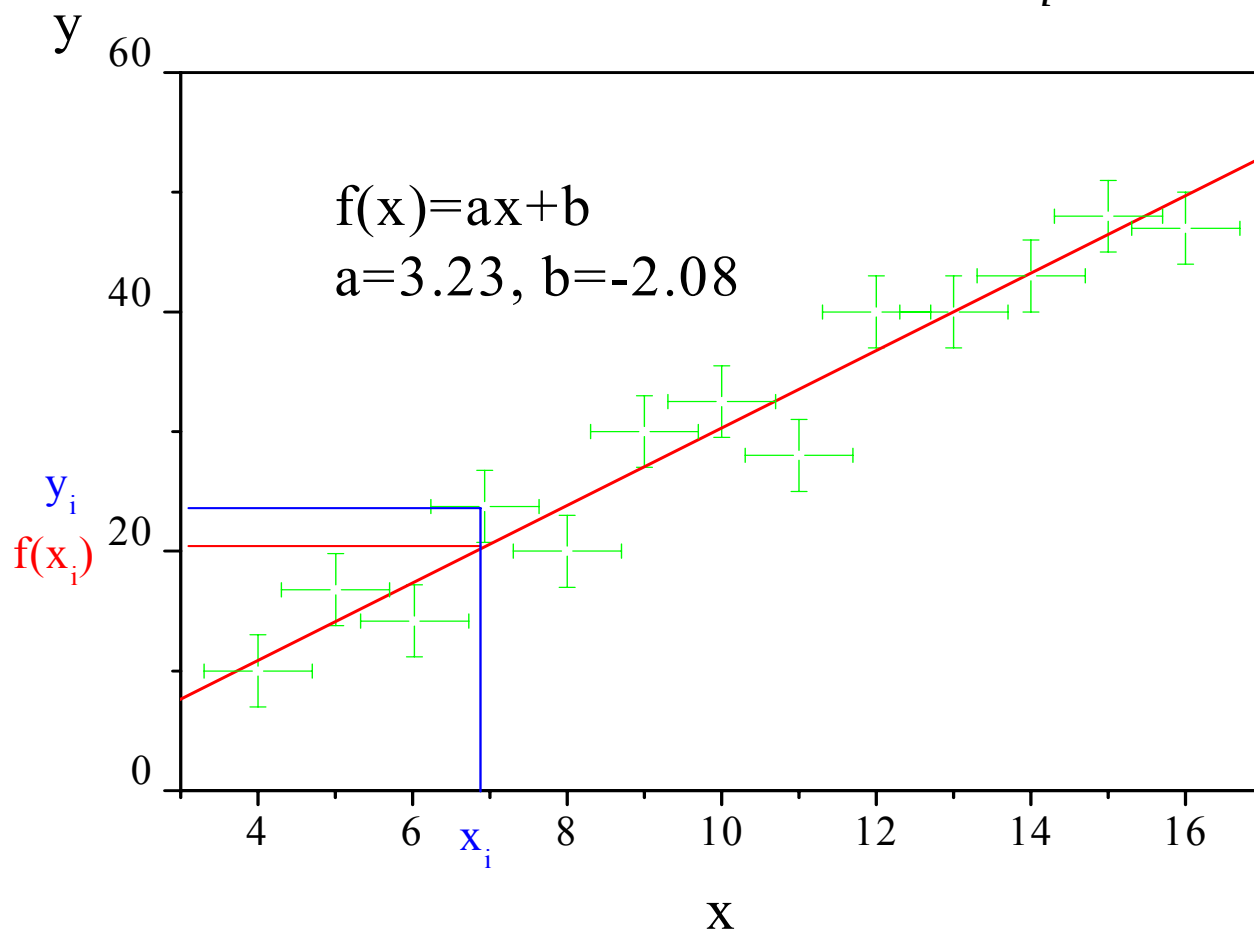
- **przybliżenie jednostajne**

znalezienie najmniejszego maksimum różnicy między $f(x)$ i jej przybliżeniem w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$

Metoda najmniejszych kwadratów

Regresja liniowa

$$S^2 = \sum_i^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min$$



Warunek minimum funkcji dwu zmiennych:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial S^2}{\partial b} = 0$$

Otrzymujemy układ równań liniowych dla niewiadomych a i b

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$a \sum x_i + b n = \sum y_i$$

Rozwiązując ten układ równań uzyskuje się wyrażenia na a i b

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{W}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{W}$$

gdzie: wyznacznik główny W wyraża się wzorem

$$W = n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2$$

Z praw statystyki można wyprowadzić wyrażenia na odchylenia standardowe $u(a)$ i $u(b)$ obu parametrów prostej a, b :

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \sqrt{\frac{S^2}{W}}$$

$$u(b) = u(a) \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

Aproksymacja wielomianowa

Zastosowanie w obliczeniach wielomianów jako funkcji przybliżających wiąże się z faktem, że maszyna cyfrowa wykonuje w praktyce działania arytmetyczne.

Wspólną właściwością potęg zmiennej i wielomianów trygonometrycznych (a także funkcji wykładniczych) jest to, że w przybliżeniach korzystających z każdej z tych klas przesunięcie układu współrzędnych zmienia współczynniki, ale nie zmienia postaci przybliżenia.

Jeżeli $P(x)$ jest wielomianem lub funkcją wymierną to $P(x+a)$ jest również tej postaci, a jeśli $T(x)$ jest liniowym lub wymiernym przybliżeniem zbudowanym z sinusów lub cosinusów, to takie jest również $T(x+a)$.

Aproksymacja wielomianowa

Przybliżenia funkcjami $\{x^n\} (n = 0, 1, \dots)$

mają taką zaletę, że przy zmianie skali zmiennej zmieniają się tylko współczynniki, a nie zmienia się kształt przybliżenia. Przykład: wielomian $P(kx)$ jest również wielomianem zmiennej x .

Tej własności nie mają przybliżenia trygonometryczne, gdyż dla niecałkowitego k na ogół $\sin(nkx)$ nie jest elementem klasy

$$\{\sin(nx)\} (n = 0, 1, 2 \dots)$$

Aproksymacja wielomianowa

Najczęściej wybiera się wielomiany gdyż można łatwo:

- obliczać ich wartości
- różniczkować
- całkować

Aproksymacja wielomianowa

Z przybliżeń wielomianowych wywodzą się metody:

- interpolacji
- ekstrapolacji
- różniczkowania numerycznego
- kwadratur
- rozwiązywania numerycznego równań różniczkowych zwyczajnych

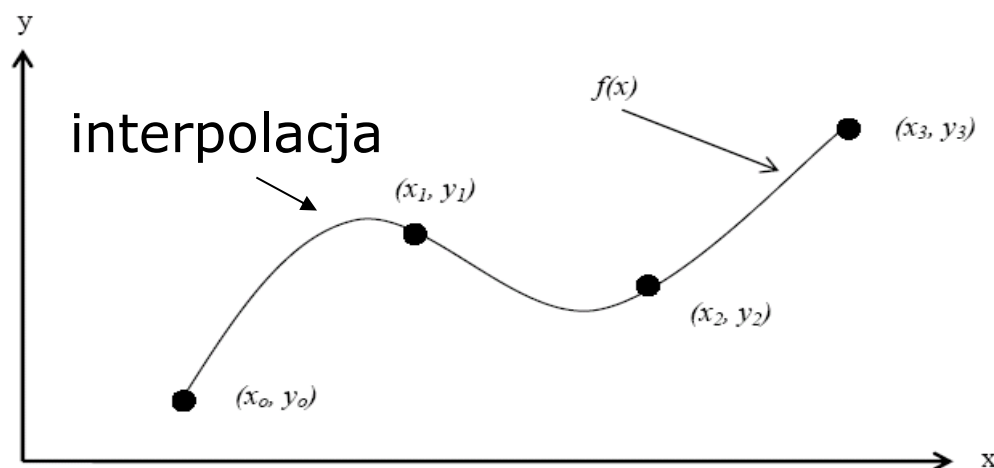
Powiązania pomiędzy tymi metodami są łatwo dostrzegalne, gdyż metody interpolacyjne są podstawą wzorów różniczkowania numerycznego, kwadratur i rozwiązywania numerycznego równań różniczkowych.

INTERPOLACJA WIELOMIANOWA

Założenie:

W przedziale $[a,b]$ danych jest $(n+1)$ różnych punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$, które nazywamy węzłami interpolacji, oraz wartości pewnej funkcji $y = f(x)$ w tych punktach:

$$f(x_i) = y_i \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n.$$



INTERPOLACJA WIELOMIANOWA

Zadanie interpolacji:

Wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz oszacowanie błędu tych przybliżonych wartości.

1. W tym celu należy znaleźć funkcję $F(x)$, zwaną *funkcją interpolującą*, która będzie „przybliżać” funkcję $f(x)$ w przedziale $[a,b]$.
2. Funkcja $F(x)$ w węzłach interpolacji przyjmuje takie same wartości co funkcja $y = f(x)$.
3. W zagadnieniu interpolacji wielomianowej funkcja $F(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n .

Twierdzenie

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n ($n \geq 0$), który w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Interpolacja - metoda bezpośrednia

Przez $n+1$ punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ przechodzi dokładnie jeden wielomian stopnia n

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n$ są stałymi współczynnikami (R)

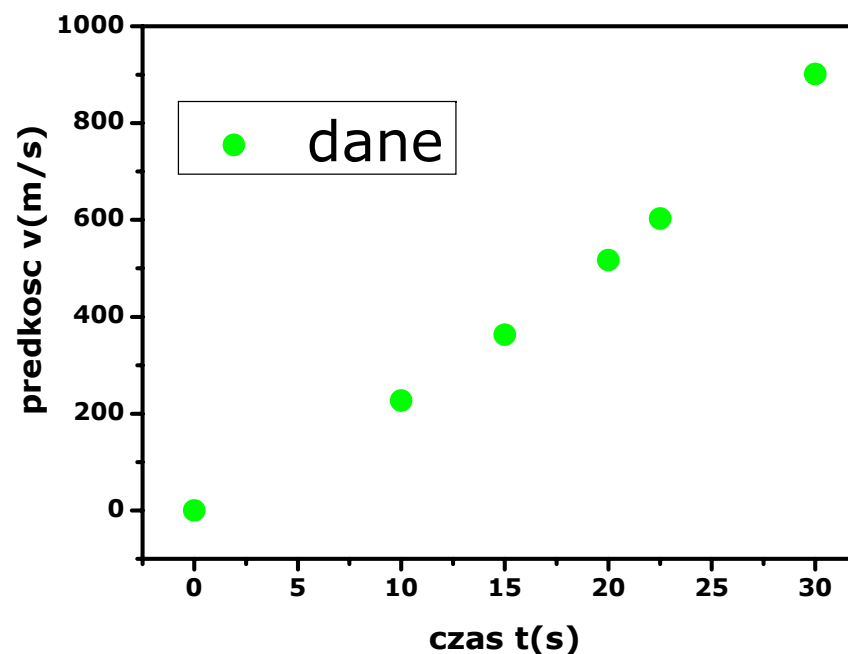
- Ułożyć $n+1$ równań aby znaleźć $n+1$ stałych
- Podstawić wartość x do wielomianu, aby znaleźć y

Przykład



Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

$t(s)$	$v(m/s)$
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili $t=16$ s stosując metodę bezpośrednią dla dwóch punktów

Interpolacja liniowa

$$v(t) = a_0 + a_1 t$$

$$v(15) = a_0 + a_1(15) = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) = 517.35$$

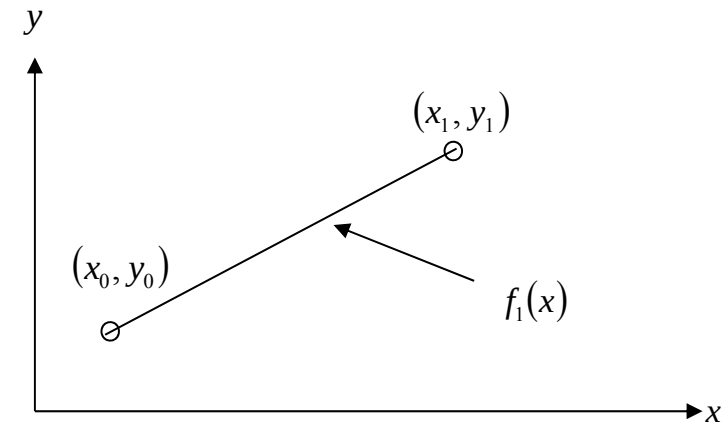
Rozwiązanie układu równań

$$a_0 = -100.93$$

$$a_1 = 30.914$$

A zatem $v(t) = -100.93 + 30.914t$, $15 \leq t \leq 20$

$$v(16) = -100.93 + 30.914(16) = 393.7 \text{ m/s}$$



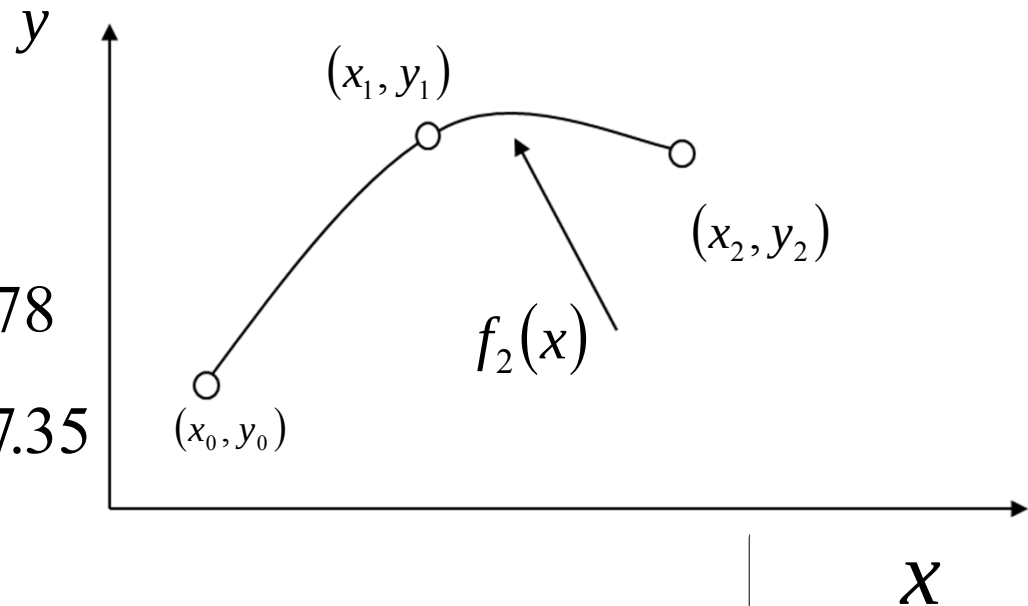
Interpolacja kwadratowa

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$v(10) = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 = 227.04$$

$$v(15) = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 = 517.35$$



Rozwiązanie układu równań

$$a_0 = 12.05 \quad a_1 = 17.733 \quad a_2 = 0.3766$$

$$v(t) = 12.05 + 17.733t + 0.3766t^2, \quad 10 \leq t \leq 20$$

$$v(16) = 12.05 + 17.733(16) + 0.3766(16)^2 = 392.19 \text{ m/s}$$

Interpolacja kwadratowa

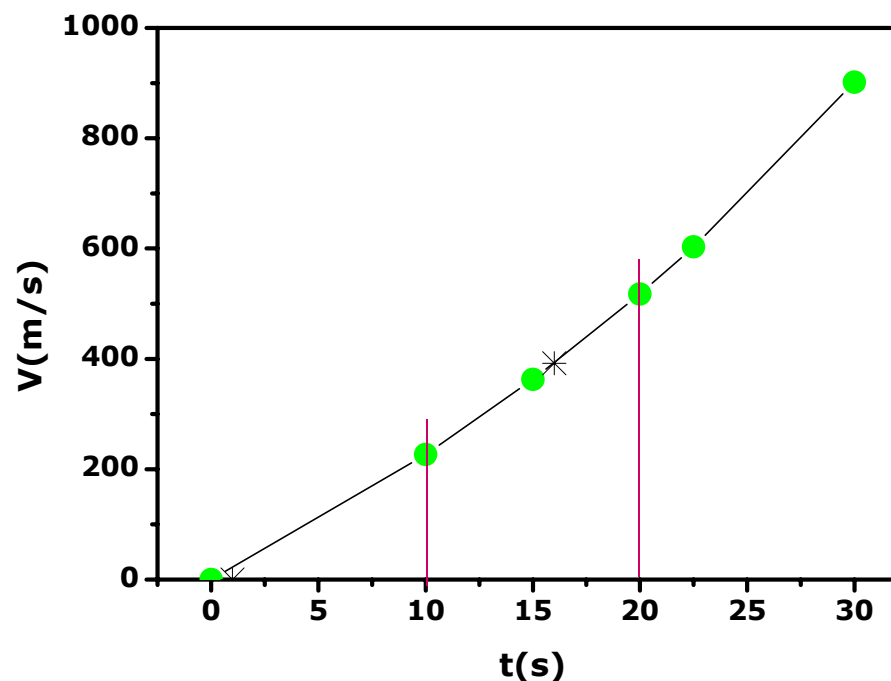
$$v(t) = 12.05 + 17.733t + 0.3766t^2, \quad 10 \leq t \leq 20$$

$$v(16) = 392.19 \text{ m/s}$$

Błąd względny

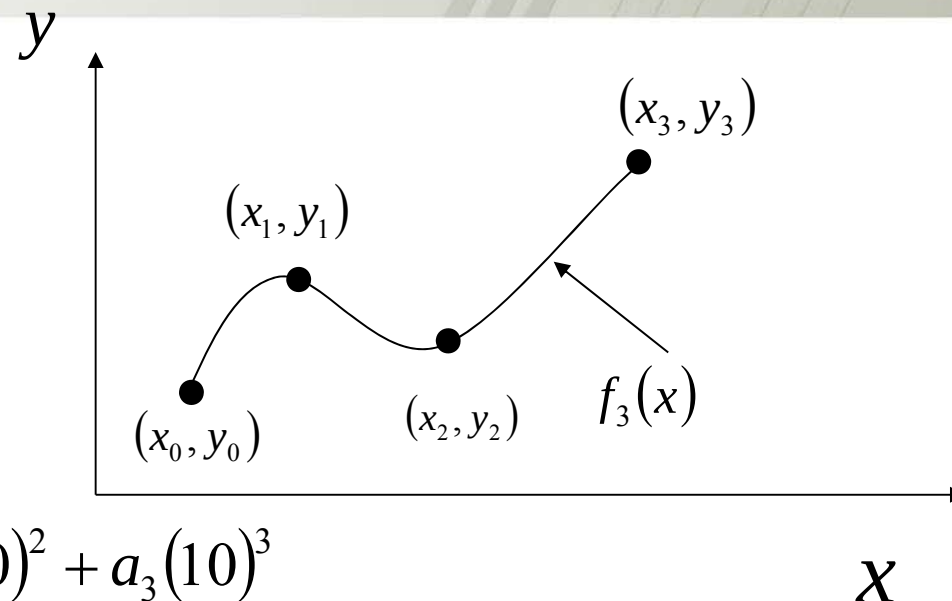
$$|\epsilon_a| = \left| \frac{392.19 - 393.70}{392.19} \right| \times 100$$

$$= 0.38410\%$$



Interpolacja sześcienna

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$



$$v(10) = 227.04 = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 + a_3(10)^3$$

$$v(15) = 362.78 = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 + a_3(15)^3$$

$$v(20) = 517.35 = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 + a_3(20)^3$$

$$v(22.5) = 602.97 = a_0 + a_1(22.5) + a_2(22.5)^2 + a_3(22.5)^3$$

Interpolacja sześcienna

Zadanie domowe

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 = 227.04 \\ a_0 + 15a_1 + 225a_2 + 3375a_3 = 362.78 \\ a_0 + 20a_1 + 400a_2 + 8000a_3 = 517.35 \\ a_0 + 22.5a_1 + 506.25a_2 + 11390.625a_3 = 602.97 \end{cases}$$

Podać i narysować $v(t)$

Interpolacja sześcienna -rozwiązanie

$$a_0 = -4.2540$$

$$a_1 = 21.266$$

$$a_2 = 0.13204$$

$$a_3 = 0.0054347$$

$$10 \leq t \leq 22.5$$

$$v(t) = -4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3,$$

$$v(16) = 392.06 \text{ m / s}$$

Błąd względny

$$\begin{aligned} |\epsilon_a| &= \left| \frac{392.06 - 392.19}{392.06} \right| \times 100 \\ &= 0.033269 \% \end{aligned}$$

Porównanie

Rząd wielomianu	1	2	3
$v(t = 16) \text{ m/s}$	393.7	392.19	392.06
błąd względny	-----	0.38410 %	0.033269 %

Obliczenia przemieszczenia

od $t=11\text{s}$ do $t=16\text{s}$

$$v(t) = -4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3, 10 \leq t \leq 22.5$$

$$s(16) - s(11) = \int_{11}^{16} v(t) dt$$

$$= \int_{11}^{16} (-4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3) dt$$

$$= \left[-4.2540t + 21.266 \frac{t^2}{2} + 0.13204 \frac{t^3}{3} + 0.0054347 \frac{t^4}{4} \right]_{11}^{16}$$

$$= 1605 \text{ m}$$

Obliczenia przyspieszenia

$$v(t) = -4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3, 10 \leq t \leq 22.5$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$$

$$= \frac{d}{dt}(-4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3)$$

$$= 21.266 + 0.26408t + 0.016304t^2, \quad 10 \leq t \leq 22.5$$

$$\begin{aligned} a(16) &= 21.266 + 0.26408(16) + 0.016304(16)^2 \\ &= 29.665 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

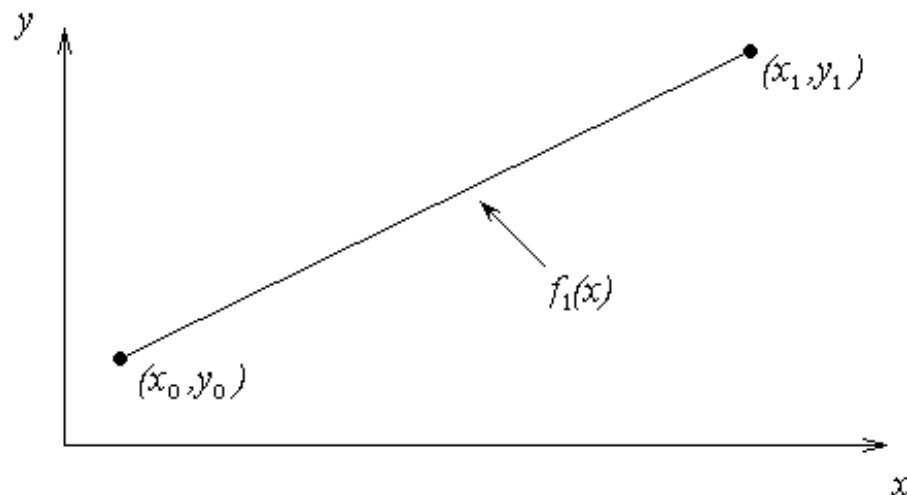
Wzór interpolacyjny Newtona

Interpolacja liniowa: dane są punkty (x_0, y_0) , (x_1, y_1) ,

szukamy

$$f_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

$$\begin{cases} b_0 = f(x_0) \\ b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

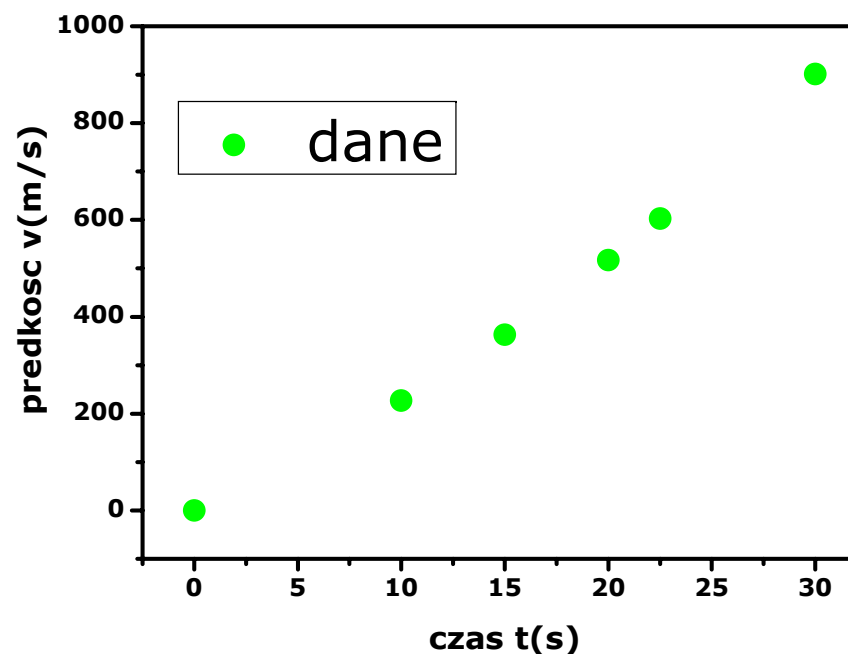


Przykład



Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

$t(s)$	$v(m/s)$
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili $t=16$ s stosując metodę Newtona

Interpolacja liniowa

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0)$$

Wiadomo, że:

$$t_0 = 15, \quad v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20, \quad v(t_1) = 517.35$$

Znajdujemy:

$$b_0 = v(t_0) = 362.78$$

$$b_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = 30.914$$

A zatem:

$$\begin{aligned} v(t) &= b_0 + b_1(t - t_0) = \\ &= 362.78 + 30.914(t - 15), \quad 15 \leq t \leq 20 \end{aligned}$$

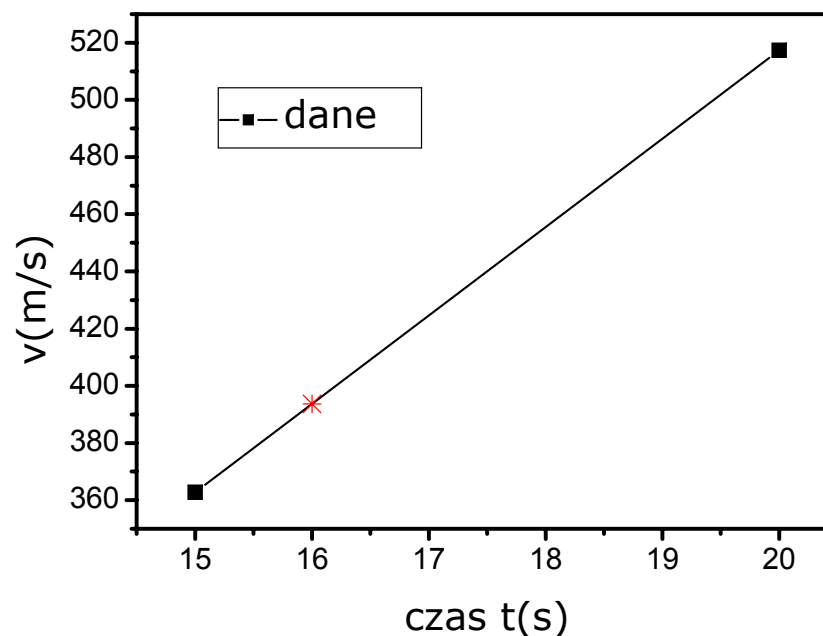
Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej

Interpolacja liniowa

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0)$$

Szukana prędkość w chwili $t=16$ s wynosi:

$$\begin{aligned} v(t) &= b_0 + b_1(t - t_0) = \\ &= 362.78 + 30.914(16 - 15) \\ &= 393.69 \text{ m/s} \end{aligned}$$



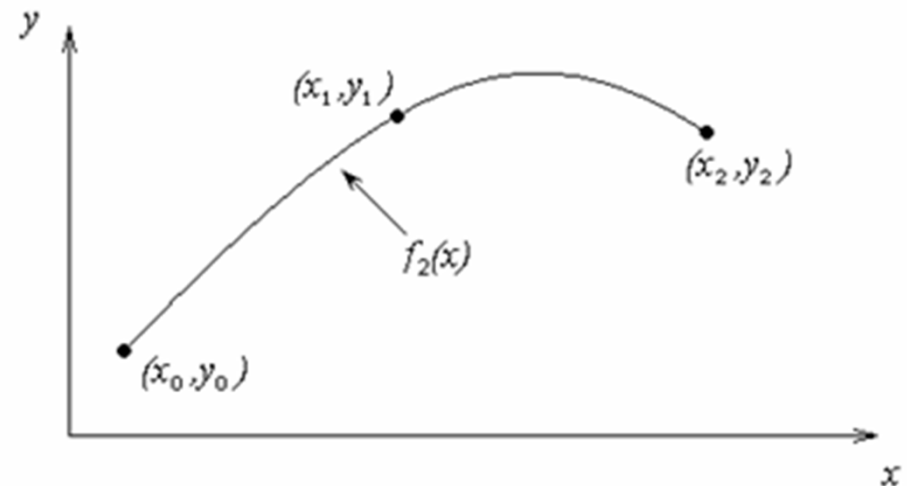
Interpolacja kwadratowa

Dane są punkty (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ,

szukamy

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = f(x_0) \\ b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \end{array} \right.$$



Interpolacja kwadratowa

Wiadomo, że:

$$t_0 = 10, \quad v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15, \quad v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20, \quad v(t_2) = 517.35$$

Znajdujemy:

$$b_0 = v(t_0) = 227.04$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{362.78 - 227.04}{15 - 10} = \\ &= 27.148 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}}{t_2 - t_0} = \frac{30.914 - 27.148}{10} = \\ &= 0.37660 \end{aligned}$$

A zatem:

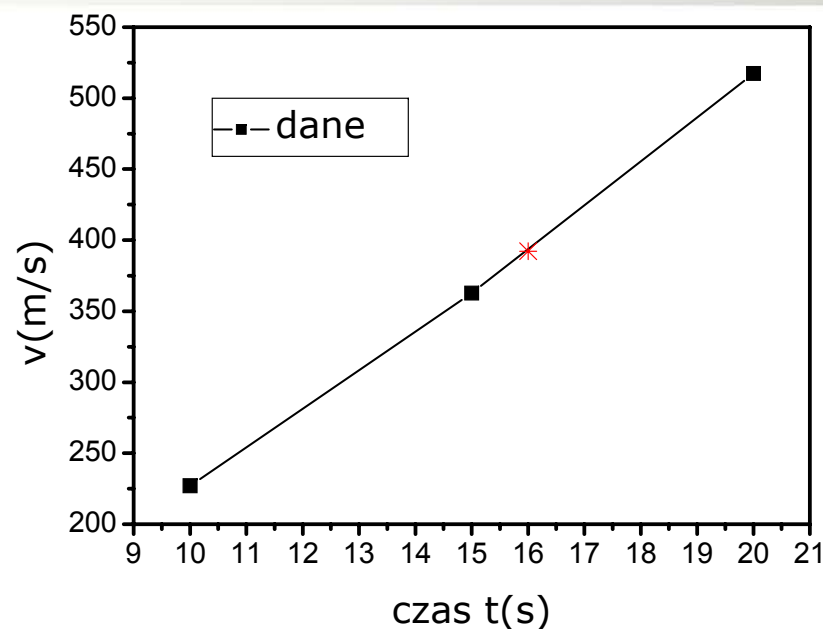
$$\begin{aligned}v(t) &= b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1) = \\&= 227.04 + 27.148(t - 10) + 0.37660(t - 10)(t - 15), \quad 10 \leq t \leq 20\end{aligned}$$

dla $t=16s$:

$$\begin{aligned}v(16) &= b_0 + b_1(16 - t_0) + b_2(16 - t_0)(16 - t_1) = \\&= 227.04 + 27.148(16 - 10) + 0.37660(16 - 10)(16 - 15) \\&= 392.19 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej

Interpolacja kwadratowa



Błąd względny w odniesieniu do poprzedniej interpolacji

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{392.19 - 393.69}{392.19} \right| \times 100$$

$$= 0.38502 \%$$

Ogólna formuła

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

gdzie

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \leftarrow \text{iloraz różnicowy pierwszego rzędu}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

A zatem

iloraz różnicowy drugiego rzędu

$$f_2(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

Ogólna formuła

Mając $(n+1)$ punktów

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$$

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

gdzie

$$b_0 = f[x_0]$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$\vdots$$

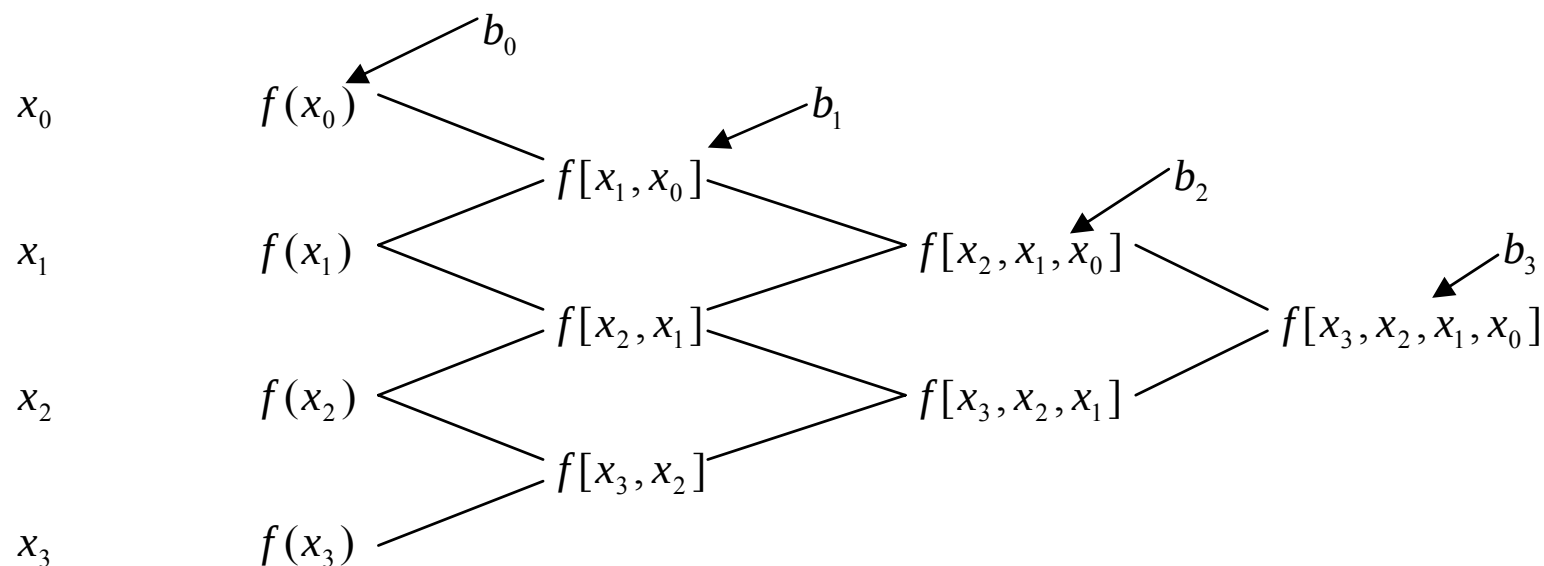
$$b_{n-1} = f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

Interpolacja sześcienna

Wielomian 3-ciego stopnia, mając dane (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , i (x_3, y_3) , ma postać

$$f_3(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$



Interpolacja sześcienna

Zadanie domowe

Znaleźć równanie na prędkość i obliczyć $v(16s)$ na podstawie interpolacji sześcienniej Newtona :

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1) + b_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$$

Dane

$$t_0 = 10, \quad v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15, \quad v(t_1) = 362.78$$

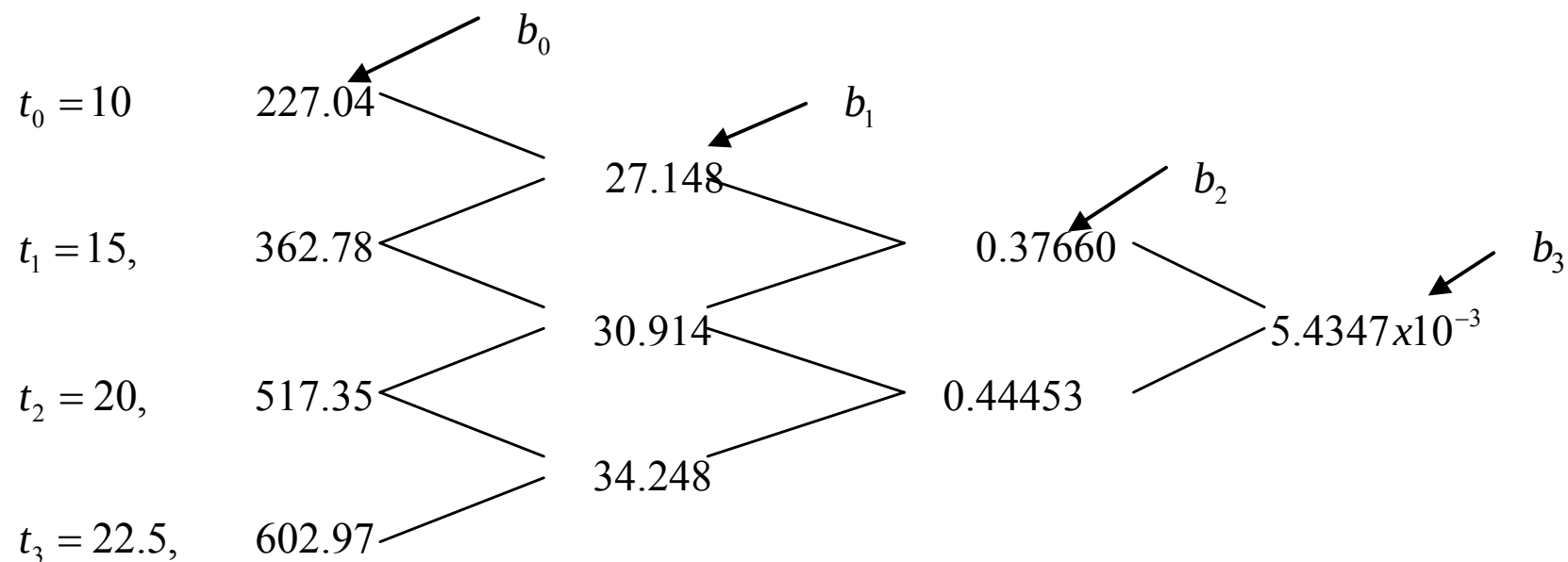
$$t_2 = 20, \quad v(t_2) = 517.35$$

$$t_3 = 22.5, \quad v(t_3) = 602.97$$

Znaleźć współczynniki b_i

Znaleźć drogę przebytą w czasie od 11s do 16 s. Znaleźć przyspieszenie w chwili $t=16$ s.

Rozwiązanie



$$b_0 = 227.04; \quad b_1 = 27.148; \quad b_2 = 0.37660; \quad b_3 = 5.4347 \cdot 10^{-3}$$

Porównanie

Rząd wielomianu	1	2	3
$v(t=16)$ m/s	393.69	392.19	392.06
Błąd względny przybliżenia	-----	0.38502 %	0.033427 %

Interpolacja z równo-odległymi węzłami

Dane są wartości funkcji $f(x_i)=y_i$ dla $i=0,1,...,n$ w punktach rozmieszczonych w jednakowych odstępach:

$$x_i = x_0 + ih$$

Pierwszy wielomian interpolacyjny Newtona ma postać:

$$\begin{aligned} N_n^I(x) = & y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ & + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

gdzie $\Delta^k f(x_0)$ jest różnica progresywna k-tego rzędu

Interpolacja z równo-odległymi węzłami

Wielomian interpolacyjny Newtona jest korzystny w pobliżu początku tablicy. W pobliżu końca tablicy stosujemy

$$N_n^{II}(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1)$$

drugi wielomian interpolacyjny Newtona z różnicami wstecznymi

Różnice progresywne

$$\Delta y_i = f(x_i + h) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

Różnice wsteczne

$$\nabla y_i = f(x_i) - f(x_i - h) = y_i - y_{i-1}$$

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Inaczej:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

Ogólnie:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j) \left\{ \frac{\omega_n(x)}{x-x_j} \right\} \Big|_{x=x_j}} = \sum_{j=0}^n f(x_j) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_j) \omega'_n(x_j)}$$

gdzie: $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

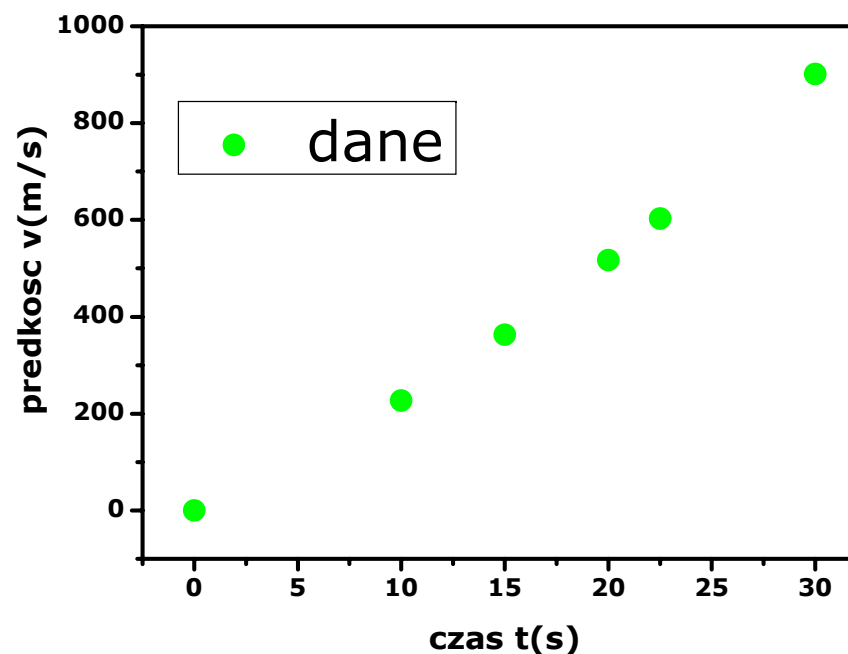
$\omega'_n(x_j)$ jest wartością pochodnej wielomianu $\omega_n(x)$ punkcie x_j będącym zerem tego wielomianu

Przykład



Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

$t(s)$	$v(m/s)$
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili $t=16$ s stosując metodę interpolacji wielomianem Lagrange'a dla dwóch punktów

Interpolacja liniowa wielomianem Lagrange'a

$$v(t) = \sum_{i=0}^1 L_i(t)v(t_i) = L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1)$$

Wiadomo, że:

$$t_0 = 15, \quad v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20, \quad v(t_1) = 517.35$$

Znajdujemy:

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^1 \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1}$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^1 \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

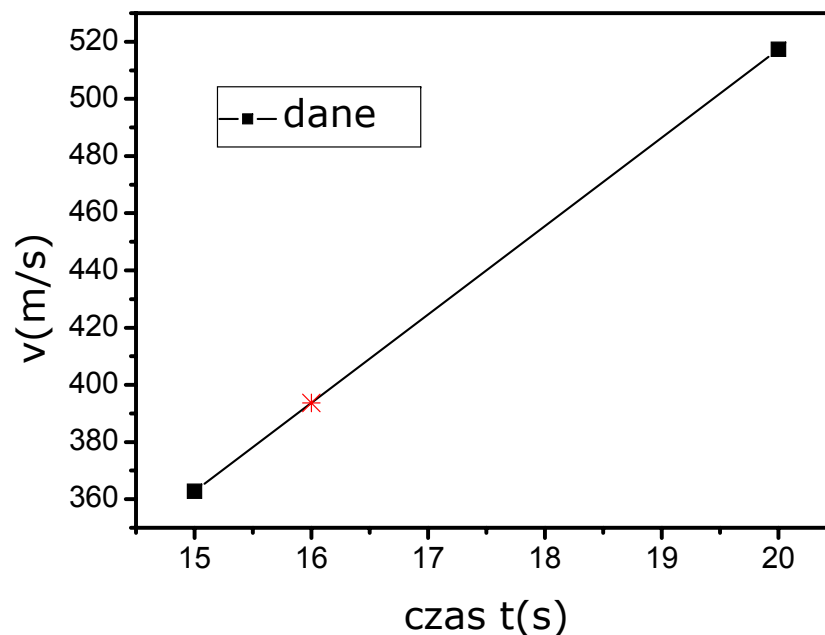
A zatem:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} v(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} v(t_1) = \\ &= \frac{t - 20}{15 - 20} 362.78 + \frac{t - 15}{20 - 15} 517.35 \end{aligned}$$

Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej

Interpolacja liniowa wielomianem Lagrange'a

$$\begin{aligned}v(16) &= \frac{16-20}{15-20} (362.78) + \frac{16-15}{20-15} (517.35) \\&= 0.8 (362.78) + 0.2 (517.35) = \\&= 393.7 \text{ m/s}\end{aligned}$$



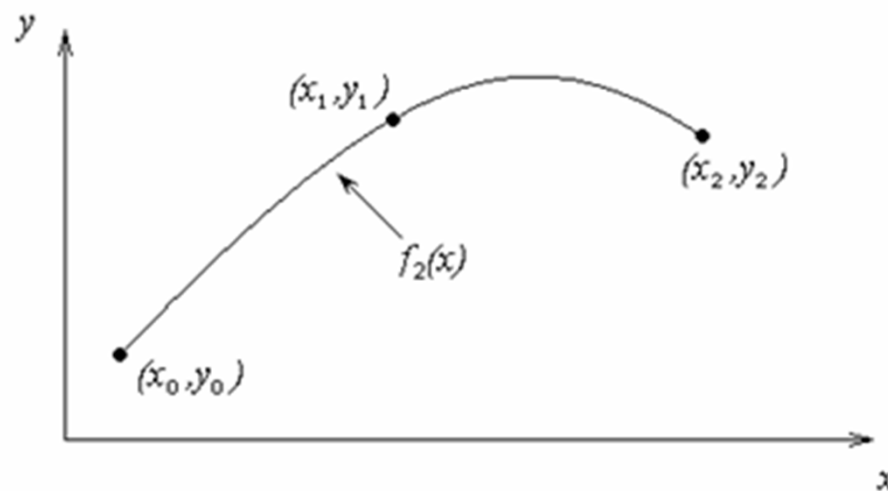
Interpolacja kwadratowa

Dane są punkty (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

szukamy
$$v(t) = \sum_{i=0}^2 L_i(t) v(t_i) =$$

$$= L_0(t) v(t_0) + L_1(t) v(t_1) + L_2(t) v(t_2)$$

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$



Interpolacja kwadratowa

Wiadomo, że:

$$t_0 = 10, \quad v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15, \quad v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20, \quad v(t_2) = 517.35$$

Znajdujemy:

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)}$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)}$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{t - t_j}{t_2 - t_j} = \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)}$$

A zatem:

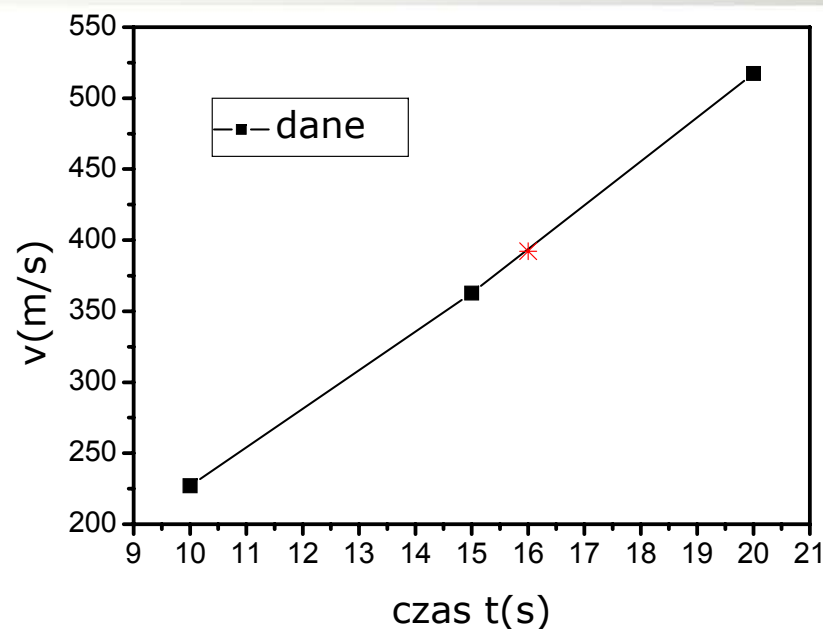
$$v(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} \frac{t - t_2}{t_0 - t_2} v(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} v(t_1) + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} v(t_2)$$

dla $t=16s$:

$$\begin{aligned}v(16) &= \frac{(16-15)(16-20)}{(10-15)(10-20)}(227.04) + \frac{(16-10)(16-20)}{(15-10)(15-20)}(362.78) \\&+ \frac{(16-10)(16-15)}{(20-10)(20-15)}(517.35) = \\&= (-0.08)(227.04) + (0.96)(362.78) + (0.12)(517.35) \\&= 392.19 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej i metodą Newtona.

Interpolacja kwadratowa



Błąd względny w odniesieniu do poprzedniej interpolacji

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{392.19 - 393.70}{392.19} \right| \times 100$$

$$= 0.38502\%$$

Interpolacja sześcienna

Zadanie domowe

Znaleźć równanie na prędkość i obliczyć $v(16s)$ na podstawie interpolacji sześciennej Lagrange'a

Dane

$$t_0 = 10, \quad v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15, \quad v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20, \quad v(t_2) = 517.35$$

$$t_3 = 22.5, \quad v(t_3) = 602.97$$

Znaleźć drogę przebytą w czasie od 11s do 16 s. Znaleźć przyspieszenie w chwili $t=16$ s.

Porównać wyniki z uzyskanymi na podstawie interpolacji metodą bezpośredniej i Newtona.

Porównanie

Rząd wielomianu	1	2	3
$v(t=16)$ m/s	393.69	392.19	392.06
Błąd względny przybliżenia	-----	0.38502 %	0.033427 %

Wzór interpolacyjny Lagrange'a - przykład

Niech dane będą punkty: 0, 1, 3, 6. Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który będzie przybliżać funkcję

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$$

Rozwiązanie:

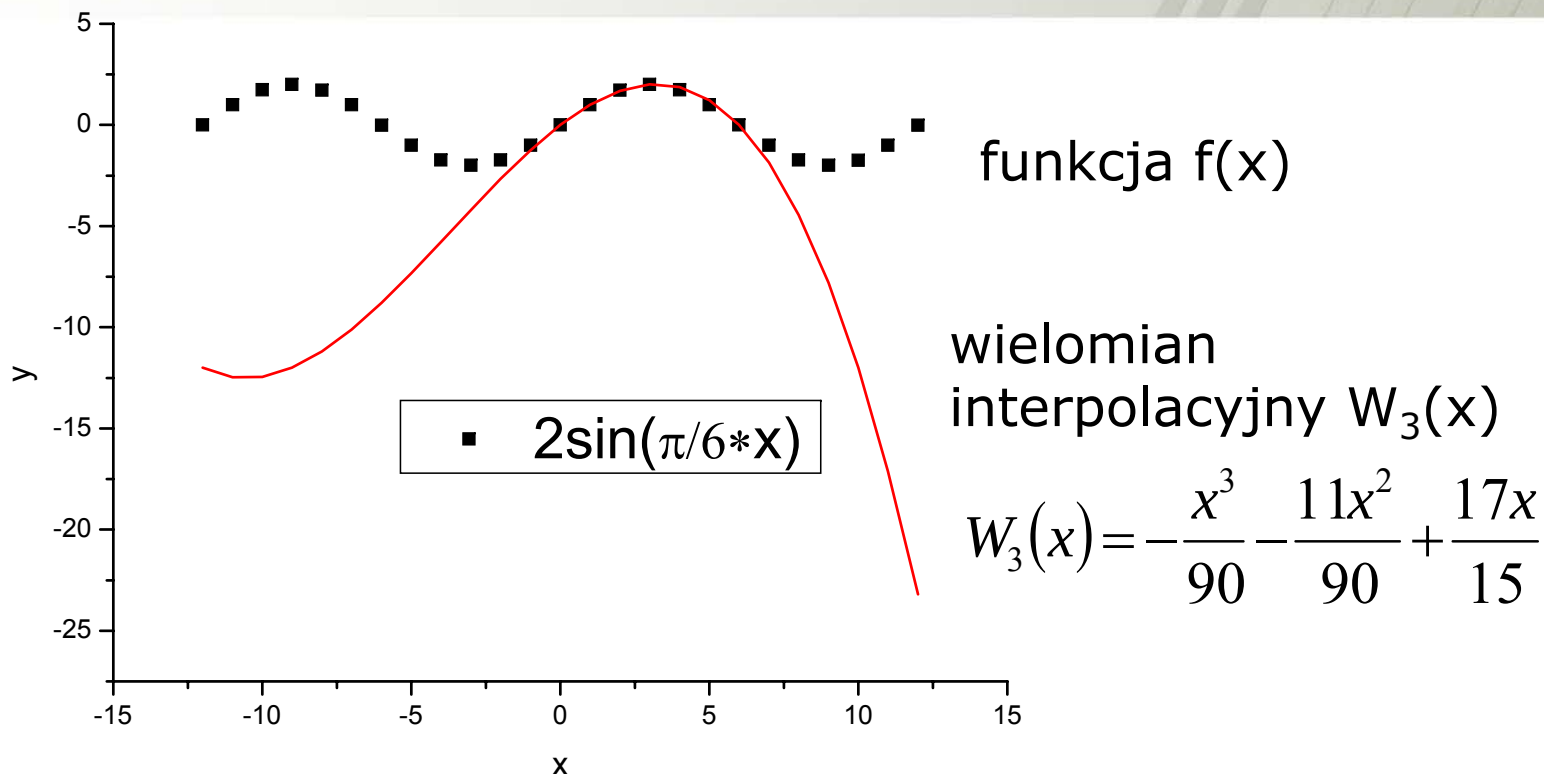
Wartości funkcji $f(x)$ w węzłach interpolacji są następujące:

$$y_0 = f(0) = 0, \quad y_1 = f(1) = 1, \quad y_2 = f(3) = 2, \quad y_3 = f(6) = 0.$$

Można pokazać, że wielomian interpolacyjny Lagrange'a przyjmuje postać:

$$W_3(x) = -\frac{x^3}{90} - \frac{11x^2}{90} + \frac{17x}{15}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a - przykład



Wielomian interpolacyjny „przybliża” funkcję $f(x)$ tylko pomiędzy skrajnymi węzłami, tzn. w przedziale $[0,6]$.
 Im mniejsze odległości między węzłami, tym lepsze przybliżenie uzyskujemy

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Z jaką dokładnością wielomian interpolacyjny $W_n(x)$ przybliża funkcję $f(x)$ w pozostałych punktach leżących wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$?

Zakładamy, że funkcja $f(x)$ w rozpatrywanym przedziale $\langle a, b \rangle$ ma pochodne do rzędu $(n+1)$ włącznie.

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{\sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

zależy od wyboru węzłów interpolacji

Motywacja

Wady interpolacji wielomianowej:

Pogorszenie wyników interpolacji przy zwiększaniu liczby węzłów.

Przykład: $f(x) = |x|$

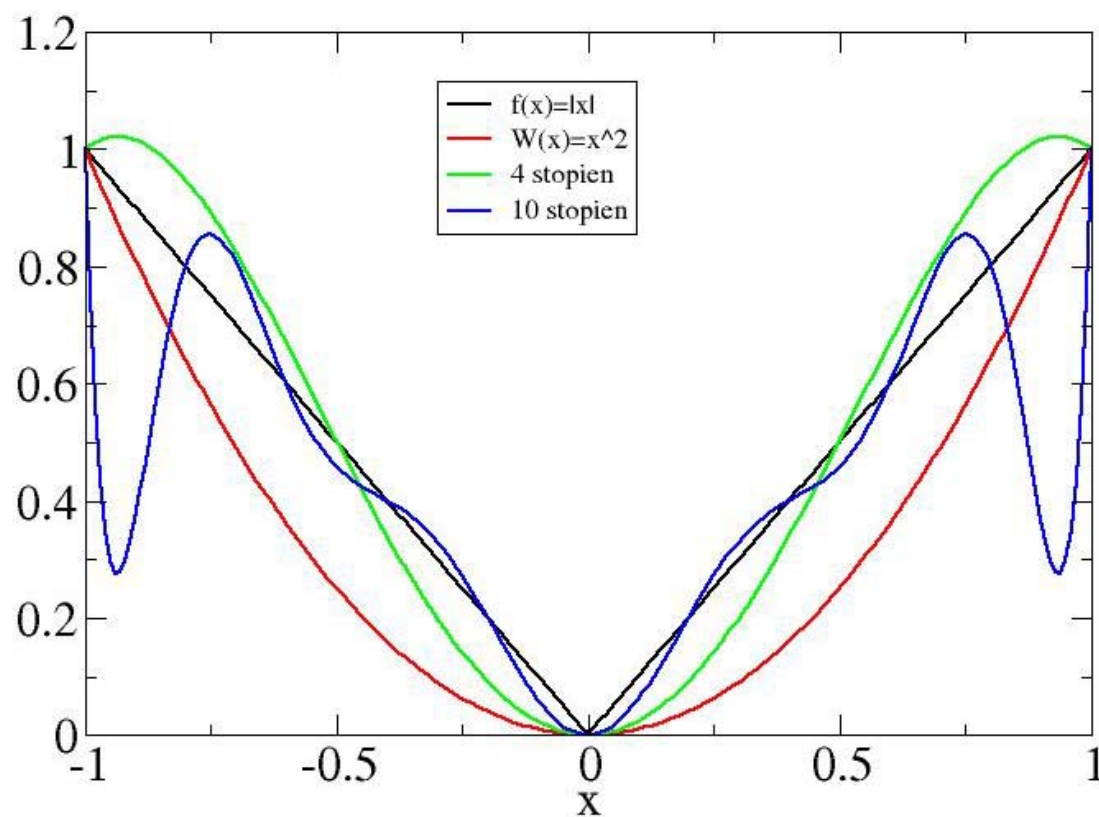
Zjawisko Rungego (przykład źle uwarunkowanego zadania):

Interpolacja wielomianami wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów prowadzi do poważnych odchyłeń od interpolowanej funkcji zwłaszcza na końcach przedziału. Interpolacja na środkowych częściach przedziału jest natomiast bardzo dobra i użyteczna

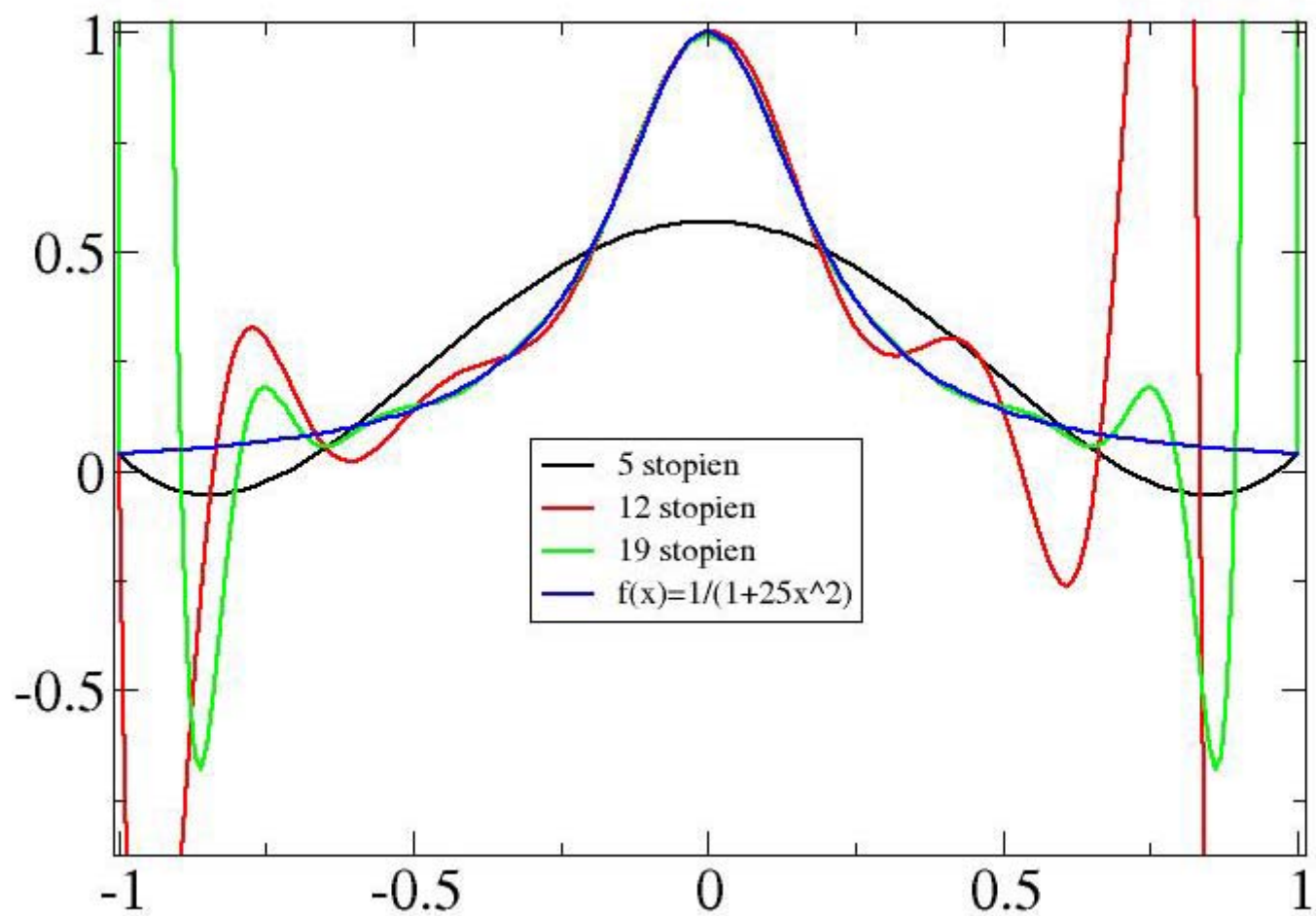
Przykład: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

Interpolacja wielomianowa szczególnych funkcji

$$f(x) = |x|$$



Zjawisko Rungego

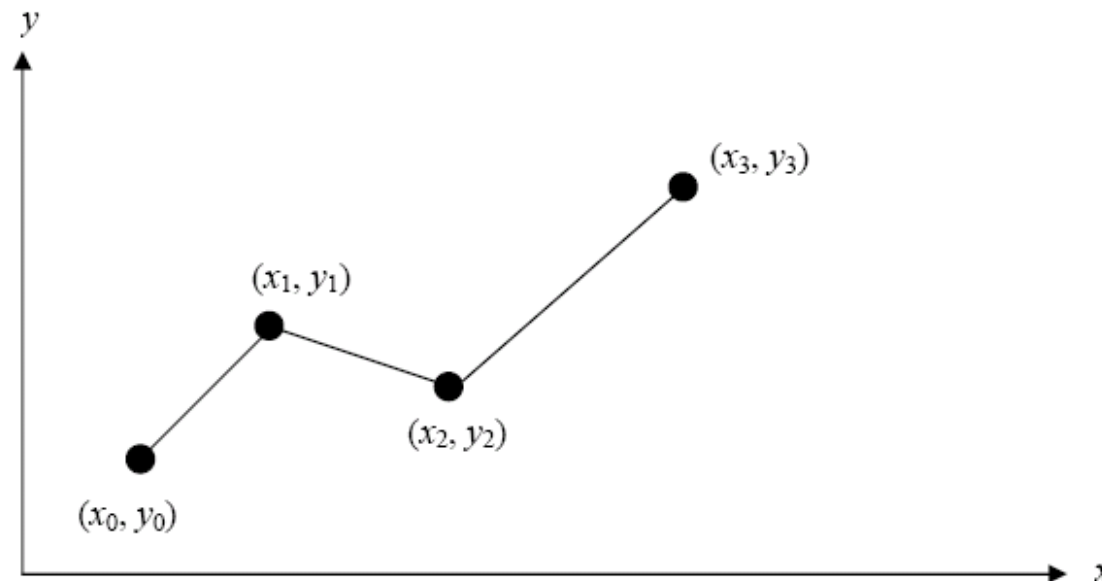


Interpolacja za pomocą liniowych funkcji sklejanych

Mając dane punkty:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$$

prorowadzimy linie proste pomiędzy punktami.



Interpolacja za pomocą liniowych funkcji sklejanych

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{\text{nachylenie prostej pomiędzy węzłami}} (x - x_1) \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

▪

nachylenie prostej
pomiędzy węzłami

▪

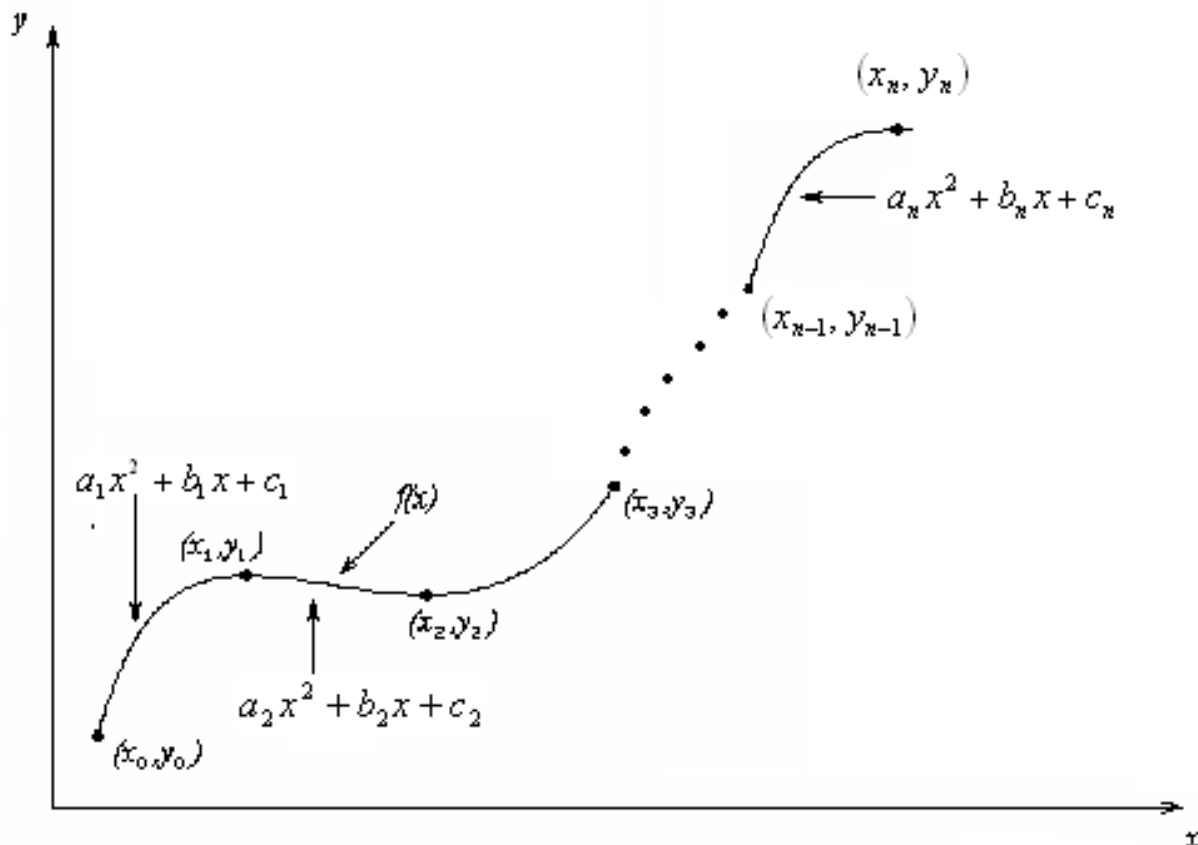
▪

$$f(x) = f(x_{n-1}) + \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}_{\text{nachylenie prostej pomiędzy węzłami}} (x - x_{n-1}) \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Mając dane punkty: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$

zapisujemy różne funkcje kwadratowe pomiędzy każdą parą punktów.



Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

$$f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

$$f(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

▪

▪

▪

$$f(x) = a_nx^2 + b_nx + c_n \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

Znaleźć współczynniki a_i, b_i, c_i $i = 1, 2, \dots, n$

Mamy $3n$ niewiadomych czyli potrzebujemy $3n$ równań

Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklepanych

Każda parabola przechodzi przez dwa sąsiednie punkty, czyli mamy $2n$ równań

$$f(x_0) = a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1$$

$$f(x_1) = a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1$$

⋮

$$f(x_{i-1}) = a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i$$

$$f(x_i) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$$

⋮

$$f(x_{n-1}) = a_n x_{n-1}^2 + b_n x_{n-1} + c_n$$

$$f(x_n) = a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n$$

Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Dodatkowe warunki otrzymujemy żądając ciągłości pierwszych pochodnych w $n-1$ wewnętrznych punktach węzłowych:

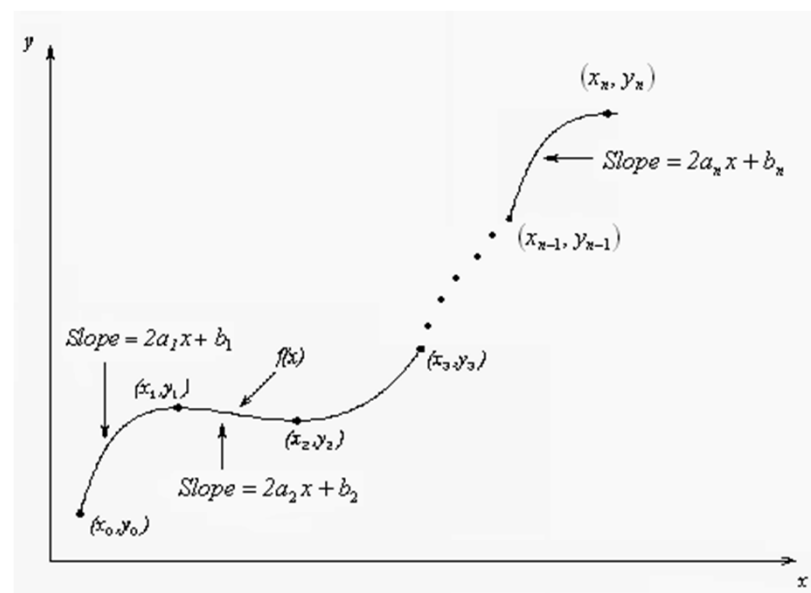
$$\text{dla } f(x) \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} f'(x) \begin{cases} 2a_1x + b_1 \\ 2a_2x + b_2 \end{cases}$$

a zatem

$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2$$

▪
▪
▪

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} = 2a_nx_{n-1} + b_n$$



Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Prowadzi to do $n-1$ równań postaci: $2a_1x_1 + b_1 - 2a_2x_1 - b_2 = 0$

$$2a_2x_2 + b_2 - 2a_3x_2 - b_3 = 0$$

⋮

$$2a_ix_i + b_i - 2a_{i+1}x_i - b_{i+1} = 0$$

⋮

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} - 2a_nx_{n-1} - b_n = 0$$

Całkowita liczba równań wynosi $2n + (n-1) = 3n-1$

Potrzebne jedno równanie może przyjąć postać np. $a_1 = 0$

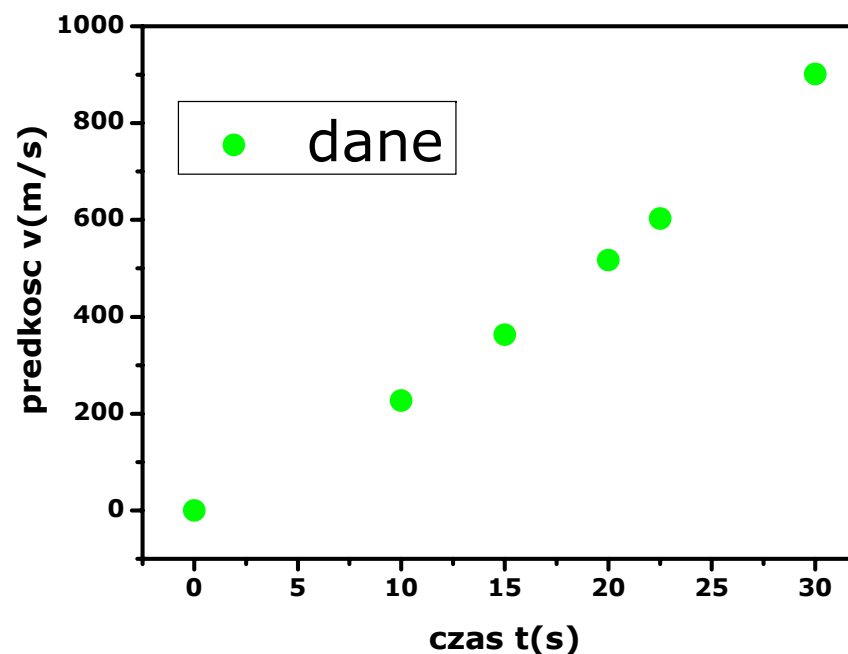
Pierwsza funkcja sklejana jest liniowa.

Przykład



Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

$t(s)$	$v(m/s)$
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili $t=16$ s stosując metodę interpolacji za pomocą kwadratowych funkcji sklejanych

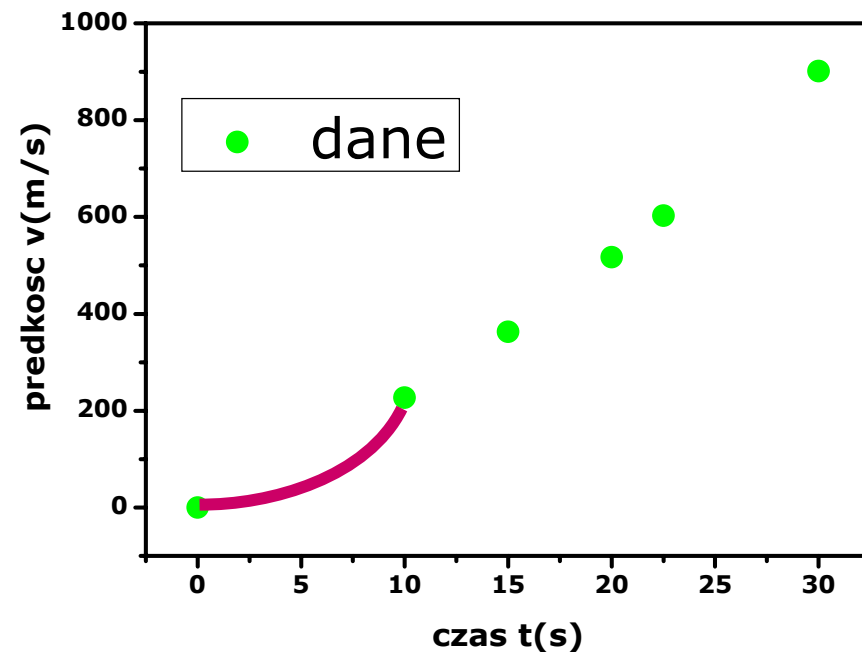
Rozwiązanie

$$\begin{aligned}v(t) &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1, & 0 \leq t \leq 10 \\&= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, & 10 \leq t \leq 15 \\&= a_3 t^2 + b_3 t + c_3, & 15 \leq t \leq 20 \\&= a_4 t^2 + b_4 t + c_4, & 20 \leq t \leq 22.5 \\&= a_5 t^2 + b_5 t + c_5, & 22.5 \leq t \leq 30\end{aligned}$$

Każda funkcja sklejana przechodzi przez dwa sąsiednie punkty

$$v(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad 0 \leq t \leq 10$$

$$\begin{cases} a_1(0)^2 + b_1(0) + c_1 = 0 \\ a_1(10)^2 + b_1(10) + c_1 = 227.04 \end{cases}$$



Dalsze równania

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Jest 10 równań, 15
poszukiwanych
współczynników

$$a_2 (10)^2 + b_2 (10) + c_2 = 227.04$$

$$a_2 (15)^2 + b_2 (15) + c_2 = 362.78$$

$$a_3 (15)^2 + b_3 (15) + c_3 = 362.78$$

$$a_3 (20)^2 + b_3 (20) + c_3 = 517.35$$

$$a_4 (20)^2 + b_4 (20) + c_4 = 517.35$$

$$a_4 (22.5)^2 + b_4 (22.5) + c_4 = 602.97$$

$$a_5 (22.5)^2 + b_5 (22.5) + c_5 = 602.97$$

$$a_5 (30)^2 + b_5 (30) + c_5 = 901.67$$

Żądanie ciągłości pochodnych

$$v(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad 0 \leq t \leq 10$$

$$= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \quad 10 \leq t \leq 15$$

$$\left. \frac{d}{dt} (a_1 t^2 + b_1 t + c_1) \right|_{t=10} = \left. \frac{d}{dt} (a_2 t^2 + b_2 t + c_2) \right|_{t=10}$$

$$(2a_1 t + b_1)|_{t=10} = (2a_2 t + b_2)|_{t=10}$$

$$2a_1(10) + b_1 = 2a_2(10) + b_2$$

$$20a_1 + b_1 - 20a_2 - b_2 = 0$$

Żądanie ciągłości pochodnych - cd

$$\text{dla } t=10\text{s} \quad 2a_1(10) + b_1 - 2a_2(10) - b_2 = 0$$

$$\text{dla } t=15\text{s} \quad 2a_2(15) + b_2 - 2a_3(15) - b_3 = 0$$

$$\text{dla } t=20\text{s} \quad 2a_3(20) + b_3 - 2a_4(20) - b_4 = 0$$

$$\text{dla } t=22.5\text{s} \quad 2a_4(22.5) + b_4 - 2a_5(22.5) - b_5 = 0$$

4 dodatkowe równania

$$\text{ostatnie równanie} \quad a_1 = 0$$

Ostateczny układ 15 równań na 15 niewiadomych

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 100 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 100 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 225 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 506.25 & 22.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 506.25 & 22.5 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 30 & 1 \\
 20 & 1 & 0 & -20 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 30 & 1 & 0 & -30 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 1 & 0 & -40 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 1 & 0 & -45 & -1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\
 b_1 \\
 c_1 \\
 a_2 \\
 b_2 \\
 c_2 \\
 a_3 \\
 b_3 \\
 c_3 \\
 a_4 \\
 b_4 \\
 c_4 \\
 a_5 \\
 b_5 \\
 c_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 227.04 \\
 227.04 \\
 362.78 \\
 362.78 \\
 517.35 \\
 517.35 \\
 602.97 \\
 602.97 \\
 901.67 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

b_i 

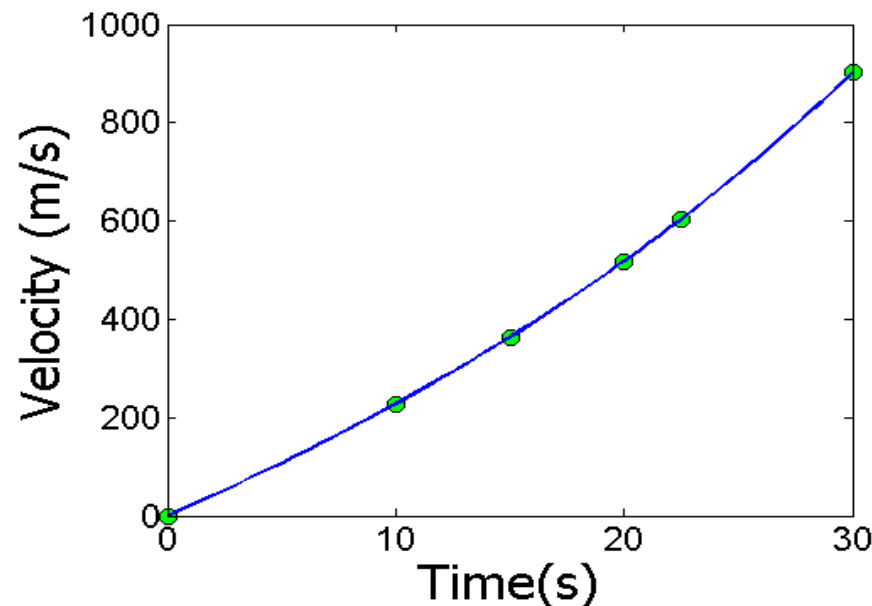
Wartości współczynników

i	a_i	b_i	c_i
1	0	22.704	0
2	0.8888	4.928	88.88
3	-0.1356	35.66	-141.61
4	1.6048	-33.956	554.55
5	0.20889	28.86	-152.13

Proszę sprawdzić czy podane wartości są prawidłowe

Ostateczne rozwiązanie

$$\begin{aligned}
 v(t) &= 22.704t, & 0 \leq t \leq 10 \\
 &= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \leq t \leq 15 \\
 &= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \leq t \leq 20 \\
 &= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \leq t \leq 22.5 \\
 &= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \leq t \leq 30
 \end{aligned}$$



Prędkość w określonym punkcie

a) Prędkość w chwili $t=16s$

$$\begin{aligned}v(t) &= 22.704t, & 0 \leq t \leq 10 \\&= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \leq t \leq 15 \\&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \leq t \leq 20 \\&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \leq t \leq 22.5 \\&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \leq t \leq 30\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(16) &= -0.1356(16)^2 + 35.66(16) - 141.61 \\&= 394.24 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Jako zadanie domowe, proszę porównać obliczoną wartość prędkości z wartością otrzymaną za pomocą interpolacji wielomianowej

Przyspieszenie w określonym punkcie

b) Acceleration at $t=16$

$$v(t) = 22.704t, \quad 0 \leq t \leq 10$$

$$= 0.8888 t^2 + 4.928 t + 88.88, \quad 10 \leq t \leq 15$$

$$= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, \quad 15 \leq t \leq 20$$

$$= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, \quad 20 \leq t \leq 22.5$$

$$= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, \quad 22.5 \leq t \leq 30$$

$$a(16) = \frac{d}{dt} v(t) \Big|_{t=16}$$

Przyspieszenie w określonym punkcie

Funkcja kwadratowa sklejana prawdziwa w punkcie $t=16s$ jest dana jako

$$v(t) = -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, \quad 15 \leq t \leq 20$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d}{dt}(-0.1356t^2 + 35.66t - 141.61) \\ &= -0.2712t + 35.66, \end{aligned}$$

$$a(16) = -0.2712(16) + 35.66 = 31.321 \text{ m/s}^2$$

Jako zadanie domowe, proszę porównać obliczoną wartość przyspieszenia z wartością otrzymaną za pomocą interpolacji wielomianowej

Droga z profilu prędkości

c) Znaleźć drogę przebytą przez raketę od $t=11s$ do $t=16s$.

$$\begin{aligned}v(t) &= 22.704t, & 0 \leq t \leq 10 \\&= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \leq t \leq 15 \\&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \leq t \leq 20 \\&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \leq t \leq 22.5 \\&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \leq t \leq 30\end{aligned}$$

$$S(16) - S(11) = \int_{11}^{16} v(t) dt$$

Droga z profilu prędkości

$$v(t) = 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, \quad 10 \leq t \leq 15$$

$$= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, \quad 15 \leq t \leq 20$$

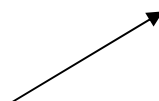
$$\begin{aligned} S(16) - S(11) &= \int_{11}^{16} v(t) dt = \int_{11}^{15} v(t) dt + \int_{15}^{16} v(t) dt \\ &= \int_{11}^{15} (0.8888t^2 + 4.928t + 88.88) dt \\ &\quad + \int_{15}^{16} (-0.1356t^2 + 35.66t - 141.61) dt \\ &= 1595.9 \text{ m} \end{aligned}$$

Jako zadanie domowe, proszę porównać obliczoną wartość przebytej odległości z wartością otrzymaną za pomocą interpolacji wielomianowej

Błąd wzoru interpolacyjnego

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{\sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

Przyjmujemy oznaczenia: $M_{n+1} = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(n+1)}(x)|$



Kres górny modułu $(n+1)$ -szej pochodnej funkcji $f(x)$ na przedziale $\langle a, b \rangle$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Błąd wzoru interpolacyjnego

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|$$

Przykład:

Oceń, z jaką dokładnością można obliczyć wartość $\ln 100,5$ przy użyciu wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, jeżeli dane są wartości: $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$

$$f(x) = \ln(x), \quad n = 3, \quad a = 100, \quad b = 103, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$M_4 = \sup_{x \in \langle 100, 103 \rangle} |f^{(4)}(x)| = \frac{6}{100^4}$$

$$|\ln 100,5 - W(100,5)| \leq \frac{6}{100^4 4!} \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5 \approx 2,344 \cdot 10^{-9}$$

Optymalny dobór węzłów interpolacji

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|$$

Wielkość błędu zależy od wyboru węzłów interpolacji poprzez ω_n .
Na M_{n+1} nie mamy wpływu.

Jak wybrać węzły interpolacji x_i , aby: $\sup_{x \in \langle a, b \rangle} |\omega_n(x)|$

miało jak najmniejszą wartość

Zagadnienie zostało sformułowane przez rosyjskiego matematyka P.L. Czebyszewa jako zagadnienie znajdowania wielomianu algebraicznego najlepiej przybliżającego zero na zadanym przedziale.

Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa
(pierwszego rodzaju):

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Można pokazać, że wielomian $T_n(x)$ jest identyczny z pewnym wielomianem algebraicznym „zawężonym” do przedziału $[-1, 1]$.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

$$T_2(x) = \cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos(3\arccos x) = 4x^3 - 3x$$

wzór rekurencyjny

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju są rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n(x)}{dx^2} - x\frac{dT_n(x)}{dx} + n^2T_n(x) = 0$$

Definiuje się je poprzez wzór Rodriguesa:

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n-1/2} \right]$$

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju są ortogonalne w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ z wagą:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Optymalny dobór węzłów interpolacji

Każdy wielomian Czebyszewa stopnia n ma n różnych pierwiastków w punktach:

$$x_m = \cos\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

zawartych między -1 i $+1$

Współczynnik przy najwyższej potędze w $T_n(x)$ jest równy 2^{n-1} .

Szukamy wielomianu, który przy najwyższej potędze ma współczynnik równy jedności

$$T_{n+1}^*(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

gdzie $x_m (m=0, 1, 2, \dots, n)$ są pierwiastkami wielomianu T_{n+1}

Optymalny dobór węzłów interpolacji

Wyrażenie:

$$\sup_{x \in \langle a, b \rangle} |\omega_n(x)|$$

w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ ma najmniejszą wartość dla wielomianu:

$$\omega_n(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

wówczas:

$$\sup_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |\omega_n(x)| = \frac{1}{2^n}$$

Jeżeli w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ za węzły interpolacji przyjmujemy zera wielomianu Czebyszewa, to

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}$$

Optymalny dobór węzłów interpolacji

W dowolnym przedziale $\langle a, b \rangle$ oszacowanie błędu wynosi:

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

przy wyborze węzłów

$$x_m = \frac{1}{2} \left[(b-a) \cos \frac{2m+1}{2n+2} \pi + (b+a) \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots, n$$

Nowe węzły x_m nie są rozmieszczone w równych odstępach lecz są zagęszczone przy końcach przedziału.

Proste transformacje liniowe sprowadzają x z przedziału $\langle a, b \rangle$ do z należącego do $\langle -1, 1 \rangle$

$$x = \frac{1}{2} [(b-a)z + (b+a)]$$
$$z = \frac{1}{b-a} (2x - b - a)$$

Podsumowanie interpolacji

*Przeczytać i przeanalizować rozdział 1.2.8 Uwagi końcowe,
Z.Fortuna, B.Macukow, J.Wąsowski, Metody numeryczne*

Wnioski:

1. Przy obliczaniu wartości wielomianu interpolacyjnego w jednym lub kilku punktach problem wyboru postaci wzoru interpolacyjnego nie jest istotny.
2. Rodzaj wybranego wzoru i rozmieszczenie węzłów ma wpływ jedynie na błąd obliczeń.
3. O czasochłonności obliczeń decyduje liczba mnożeń i dzielen.

dla wielomianu Lagrange'a stanowi to n^2+4n+2

dla wielomianu Newtona $1/2 n^2+3/2 n^2$