

METODY NUMERYCZNE

Wykład 1.

Wprowadzenie do metod numerycznych

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH,
Katedra Elektroniki, AGH
e-mail: zak@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~zak>

Met.Numer. wykład 1

1

Wprowadzenie do metod numerycznych

Metody numeryczne są działem matematyki stosowanej zajmującym się opracowywaniem metod przybliżonego rozwiązywania problemów matematycznych, których albo nie można rozwiązać metodami dokładnymi albo metody dokładne posiadają tak dużą złożoność obliczeniową, że są praktycznie nieużyteczne

Metody numeryczne zajmują się konstruowaniem algorytmów, których obiektami, tj. danymi, wynikami pośrednimi i wynikami ostatecznymi są **liczby**

Met.Numer. wykład 1

2

Wprowadzenie do metod numerycznych

Cechy charakterystyczne metod numeryczne:

- obliczenia wykonywane są na liczbach przybliżonych
- rozwiązania zagadnień też są wyrażone liczbami przybliżonymi
- wielkość błędu w procesie obliczeń numerycznych jest zawsze kontrolowana

Literatura:

- Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, Metody numeryczne, Podręczniki Akademickie EIT, WNT Warszawa, 1982, 2005
- L.O. Chua, P-M. Lin, Komputerowa analiza układów elektronicznych-algorytmy i metody obliczeniowe, WNT, Warszawa, 1981
- G.Dahlquist, A.Björck, Metody matematyczne, PWN Warszawa, 1983
- Autar Kaw, Luke Snyder

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Literatura dodatkowa:

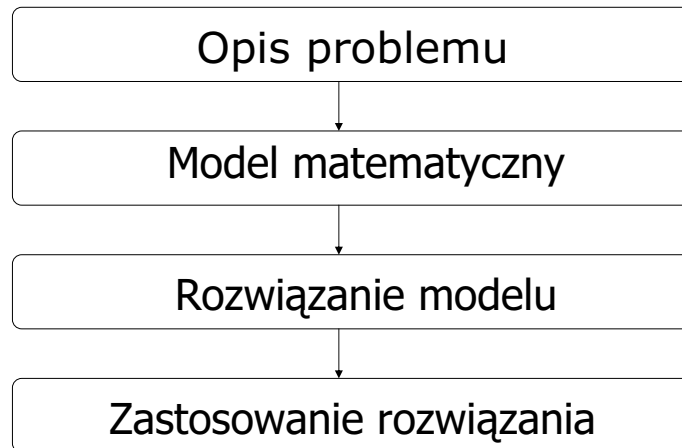
- M.Wciślik, Wprowadzenie do systemu Matlab, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2000
- S. Osowski, A. Cichocki, K.Siwiek, Matlab w zastosowaniu do obliczeń obwodowych i przetwarzania sygnałów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006
- W.H. Press, et al., Numerical recipes, Cambridge University Press, 1986

Wprowadzenie do metod numerycznych

Plan

- Rozwiązywanie problemów inżynierskich
- Przegląd typowych procedur matematycznych
- Stało i zmiennoprzecinkowa reprezentacja liczb

Jak rozwiązuje się problem inżynierski?



Met.Numer. wykład 1

7

Przykład rozwiązania problemu inżynierskiego



*the Bridge of Lions in
St. Augustine, Florida*

wg Autar Kaw

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Mechanizm otwarcia mostu
zwodzonego



Met.Numer. wykład 1

8

Mechanizm THG



piasta (ang. hub)

czop zawieszenia
obrotowego
(ang. trunnion)

dźwigar mostu
(ang. girder)

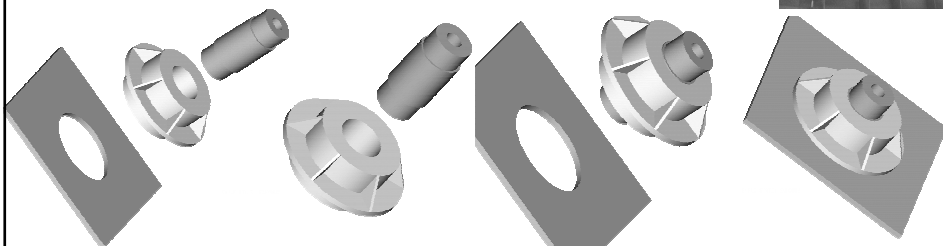
<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

9

Montaż THG

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

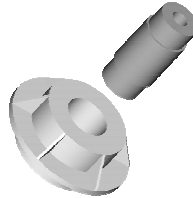
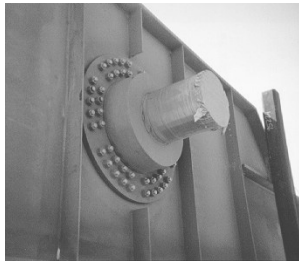


- Etap 1.** Czop jest zanurzany w mieszaninie suchy lód/alkohol (108 F, około -80 C)
- Etap 2.** Czop rozszerza się w piaście
- Etap 3.** Czop-piasta zanurzone w mieszaninie suchy lód/alkohol
- Etap 4.** Po umieszczeniu w dźwigarze czop-piasta rozszerza się

Met.Numer. wykład 1

10

Pojawił się problem!



Po schłodzeniu, czop „zaciął się” w piąście

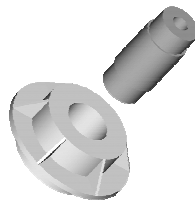
<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

11

Dlaczego?

Wymagana jest kontrakcja elementu 0.015" lub więcej.
Czy czop uległ wystarczającemu zwężeniu?

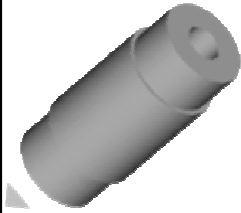


<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

12

Obliczenia



$$\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T$$

$$D = 12.363''$$

$$\alpha = 6.47 \times 10^{-6} \text{ in/in/}^{\circ} F$$

$$\Delta T = -108 - 80 = -188^{\circ} F$$

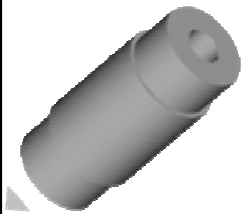
$$\begin{aligned} \Delta D &= (12.363)(6.47 \times 10^{-6})(-188) \\ &= -0.01504'' \end{aligned}$$

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

13

Jednostki



$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$$

$$D = 12.363'' \approx 31.4 \text{ cm}$$

$$T_F = \left(\frac{9}{5} T_C + 32 \right)^{\circ} F$$

$$T = 80^{\circ} F \approx 26.7^{\circ} C$$

$$\Delta D = 0.01504 \text{ in} = 0.03820 \text{ cm}$$

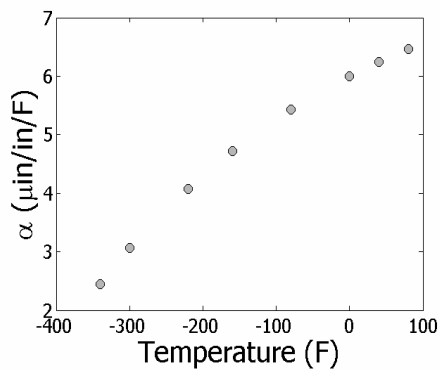
<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

14

Czy użyty wzór jest prawidłowy?

$$\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T$$



<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

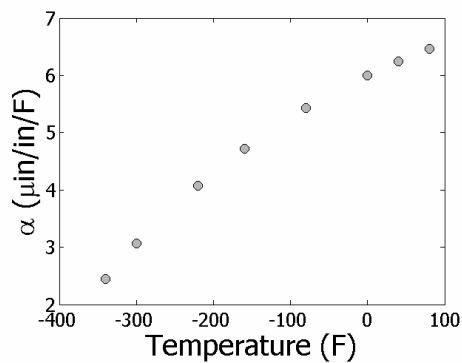
Met.Numer. wykład 1

15

T(°F)	α (in/in/°F)
-340	2.45
-300	3.07
-220	4.08
-160	4.72
-80	5.43
0	6.00
40	6.24
80	6.47

Rozwiązanie problemu

Prawidłowy model powinien brać pod uwagę zmieniający się współczynnik rozszerzalności termicznej



$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T) dT$$

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

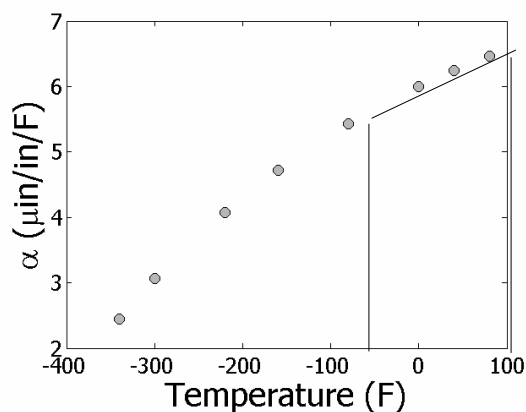
Met.Numer. wykład 1

16

Czy można oszacować kontrakcję?

$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T) dT$$

$T_a = 80^\circ\text{F}; T_c = -108^\circ\text{F}; D = 12.363''$



<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

17

Dokładne określenie kontrakcji

Zmiana średnicy (ΔD)
przez oziębianie w
mieszaniu lód/alkohol
jest dana

$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T) dT$$

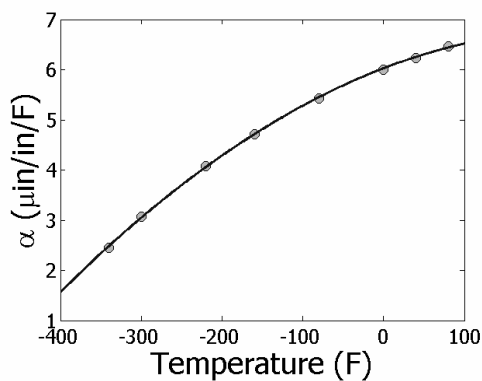
$$T_a = 80^\circ\text{F}$$

$$T_c = -108^\circ\text{F}$$

$$D = 12.363''$$

$$\alpha = -1.2278 \times 10^{-5} T^2 + 6.1946 \times 10^{-3} T + 6.0150$$

$$\Delta D = -0.0137'' \quad \text{za mało!!!}$$

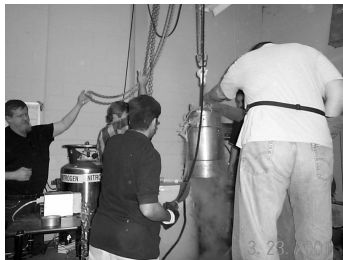


Met.Numer. wykład 1

18

Zastosowanie rozwiązania problemu – wskazówki praktyczne

Jedną z możliwych wskazówek jest aby czop schładzać w ciekłym azocie, który wrze w temperaturze -321°F dużo niższej niż -108°F dla mieszaniny suchy lód/alkohol



$$\Delta D = -0.0244'$$

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

19

Podsumowując:

- 1) Stwierdzenie problemu: czop nie obraca się swobodnie
- 2) Modelowanie: stworzenie nowego modelu
$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T) dT$$
- 3) Rozwiązanie: a) użyć metody graficznej b) użyć metod regresji i przeprowadzić całkowanie
- 4) Implementacja: schładzać czop w temperaturze ciekłego azotu.

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

20

Procedury matematyczne

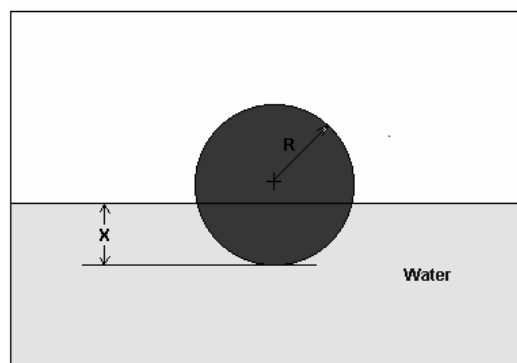
- Równania nieliniowe
- Różniczkowanie
- Układ równań liniowych
- Dopasowanie krzywych
 - Interpolacja
 - Regresja
- Całkowanie
- Zwyczajne równania różniczkowe
- Inne zaawansowane procedury:
 - Częstkowe równania różniczkowe
 - Optymalizacja
 - Szybka transformata Fouriera

Met.Numer. wykład 1

21

Równania nieliniowe

Jak głęboko kula jest zanurzona w wodzie?



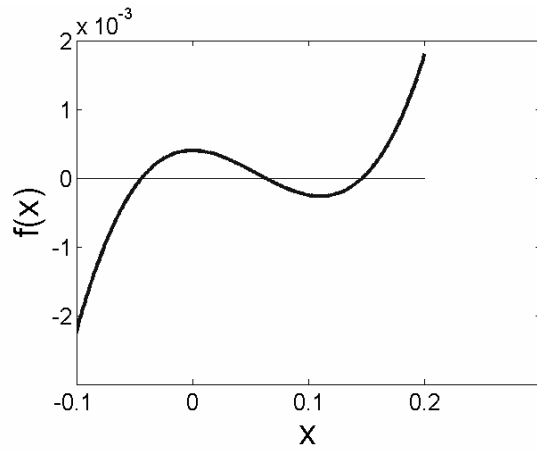
$$2R=0.11\text{m}$$

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

22



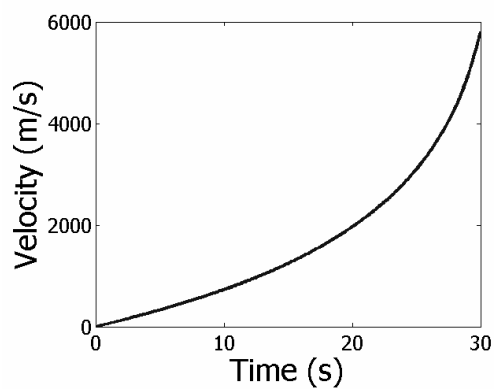
$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$

Met.Numer. wykład 1

23

Różniczkowanie

Jakie jest przyspieszenie
w $t=7$ s?



$$v(t) = 2200 \ln\left(\frac{16 \times 10^4}{16 \times 10^4 - 5000t}\right) - 9.8t$$

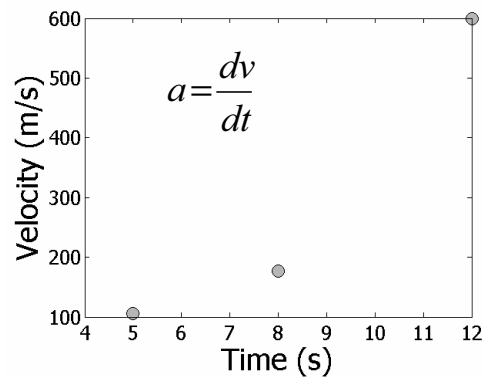
$$a = \frac{dv}{dt}$$

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

24

Czas (s)	5	8	12
V(m/s)	106	177	600



Met.Numer. wykład 1

25

Układ równań liniowych

Znaleźć profil prędkości, przy założeniu:

Czas (s)	5	8	12
V (m/s)	106	177	600

$$v(t) = at^2 + bt + c, \quad 5 \leq t \leq 12$$

Układ trzech równań liniowych

$$\begin{cases} 25a + 5b + c = 106 \\ 64a + 8b + c = 177 \\ 144a + 12b + c = 600 \end{cases}$$



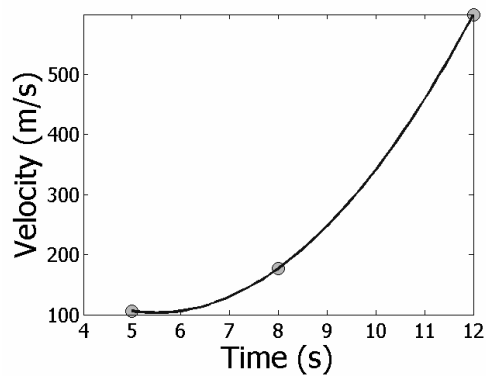
Met.Numer. wykład 1

26

Interpolacja

Jaka jest prędkość rakiety w $t=7$ s?

Czas (s)	5	8	12
V (m/s)	106	177	600

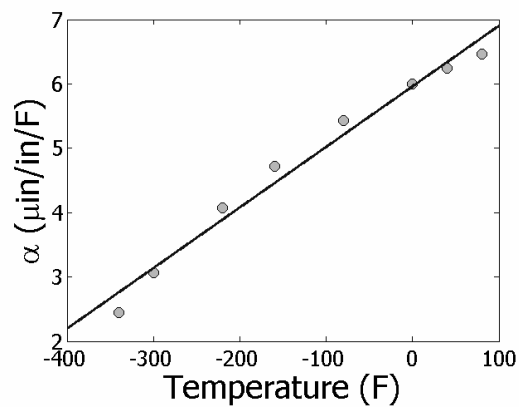


Met.Numer. wykład 1

27

Regresja

Współczynnik rozszerzalności termicznej stali



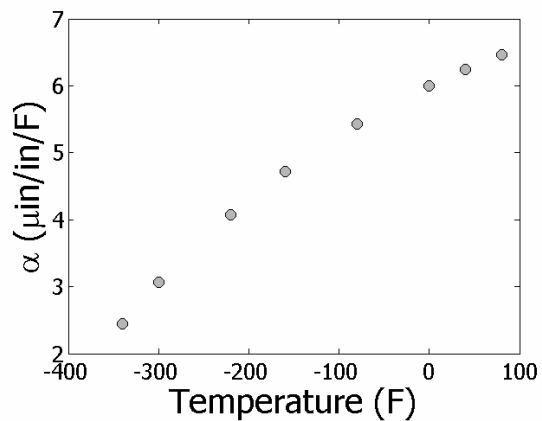
<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

28

Całkowanie

$$\Delta D = D \int_{T_{room}}^{T_{fluid}} \alpha dT$$



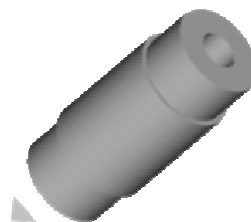
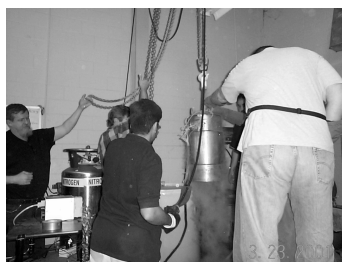
<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

29

Zwyczajne równania różniczkowe

Jak długo trzeba chłodzić ciało?



$$mc \frac{d\theta}{dt} = -hA(\theta - \theta_a), \quad \theta(0) = \theta_{room}$$

<http://numericalmethods.eng.usf.edu>

Met.Numer. wykład 1

30

Co trzeba wiedzieć układając własne algorytmy obliczeniowe?

- wielkość pamięci operacyjnej komputera
- szybkość wykonywania operacji arytmetycznych i logicznych
- zakres liczb dopuszczalnych podczas obliczeń
- dokładność wykonywania podstawowych działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych

Sposób przedstawiania liczb w pamięci komputera

Liczby są zapamiętywane jako

- stałoprzecinkowe (liczby stałopozycyjne, ang. fixed-point numbers)
- zmiennoprzecinkowe (liczby zmiennopozycyjne, ang. floating-point numbers, fl)

Komputer pracuje wewnętrznie w układzie dwójkowym, a komunikuje się ze światem zewnętrznym w układzie dziesiętnym, stąd procedury konwersji.

Jest to źródłem błędów.

Arytmetyka komputerowa

Reprezentacja liczby dziesiętnej

$$257.76 = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

System dwójkowy (binarny)

$$(1011.0011)_2 = \left((1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) + (0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}) \right)_{10} \\ = 11.1875$$

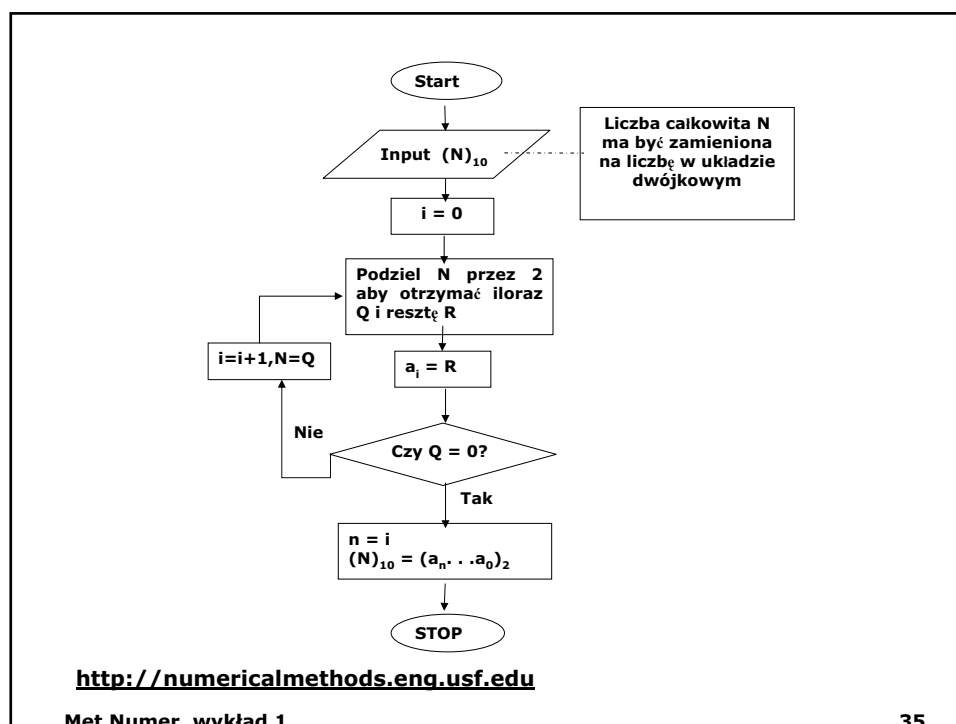
W układzie dwójkowym stosujemy dwie cyfry: 0 i 1,
nazywane **bitami**

Zamiana liczby całkowitej w zapisie dziesiętnym na liczbę w zapisie dwójkowym

	Iloraz	Reszta
11/2	5	$1 = a_0$
5/2	2	$1 = a_1$
2/2	1	$0 = a_2$
1/2	0	$1 = a_3$

stąd

$$(11)_{10} = (a_3 a_2 a_1 a_0)_2 \\ = (1011)_2$$



**Zamiana liczby ułamkowej w zapisie dziesiętnym
na liczbę w zapisie dwójkowym**

	Wynik mnożenia	Po przecinku	Liczba przed przecinkiem
0.1875×2	0.375	0.375	$0 = a_{-1}$
0.375×2	0.75	0.75	$0 = a_{-2}$
0.75×2	1.5	0.5	$1 = a_{-3}$
0.5×2	1.0	0.0	$1 = a_{-4}$

stąd $(0.1875)_{10} = (a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4})_2$
 $= (0.0011)_2$

Met.Numer. wykład 1

36

**Zamiana dowolnej liczby w zapisie dziesiętnym
na liczbę w zapisie dwójkowym**

$$(11.1875)_{10} = (\quad ? \cdot ? \quad)_2$$

skoro

$$(11)_{10} = (1011)_2$$

i

$$(0.1875)_{10} = (0.0011)_2$$

otrzymujemy

$$(11.1875)_{10} = (1011.0011)_2$$

Inne podejście

$$(11.1875)_{10}$$

$$(11)_{10} = 2^3 + 3$$

$$= 2^3 + 2^1 + 1$$

$$= 2^3 + 2^1 + 2^0$$

$$= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= (1011)_2$$

Inne podejście

$$\begin{aligned}(0.1875)_{10} &= 2^{-3} + 0.0625 \\ &= 2^{-3} + 2^{-4} \\ &= 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \\ &= (.0011)_2\end{aligned}$$

$$(11.1875)_{10} = (1011.0011)_2$$

Problem dokładności

Przykład: Nie wszystkie liczby ułamkowe mogą być przedstawione dokładnie w systemie dwójkowym

	Wynik	Po przecinku	Przed przecinkiem
0.3×2	0.6	0.6	$0 = a_{-1}$
0.6×2	1.2	0.2	$1 = a_{-2}$
0.2×2	0.4	0.4	$0 = a_{-3}$
0.4×2	0.8	0.8	$0 = a_{-4}$
0.8×2	1.6	0.6	$1 = a_{-5}$

$$(0.3)_{10} \approx (a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4}a_{-5})_2 = (0.01001)_2 = 0.28125$$

Dokładność z jaką można przedstawiać liczby zależy od długości słów w komputerze. Zaokrąglanie i obcinanie prowadzi do błędów.

Struktura liczby zmiennoprzecinkowej

$$x = M \times N^w$$

M-mantysa liczby x

W-wykładnik części potęgowej,

N=2, 10

W zapisie zmiennoprzecinkowym liczba rzeczywista jest przedstawiana za pomocą dwóch grup bitów:

I – tworzy mantysę M, część ułamkowa $\frac{1}{2} < M < 1$

II - tworzy W , liczba całkowita, zakres W decyduje o zakresie liczb dopuszczalnych w komputerze

Met.Numer. wykład 1

41

Struktura liczby zmiennoprzecinkowej

$$x = M \times N^w$$

Przykład:

Jeżeli w zapisie dwójkowym M określa 5 bitów a W trzy bity, przy czym pierwszy bit określa znak („-” to jeden), to:

$$x = (1)1101 \quad (0)10$$

M W

oznacza liczbę $x = -0,1101 \times 2^{+10}$

czyli:
$$x = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16}\right) \times 2^{+(1 \cdot 2 + 0 \cdot 1)}$$

w zapisie dziesiętnym -3,25

Met.Numer. wykład 1

42

Struktura liczby zmiennoprzecinkowej

$$x = M \times N^w$$

W tym zapisie można utworzyć tylko niektóre liczby dodatnie w zakresie od 0,0625 do 7,5; liczbę 0 oraz liczby ujemne od -0,0625 do -7,5.

Są pewne liczby, których nie można w tym zapisie przedstawić

Liczba $x=0.2$ (w zapisie dziesiętnym) ma w zapisie dwójkowym nieskończone rozwinięcie równe:

$$x = 0,0011(0011)$$

Najbliższa jej liczba (dla $M=5$ i $W=3$) to $x = 0,001100$

czyli 0,1875

Jest to źródłem błędów wejściowych

Struktura liczby stałoprzecinkowej

Wagi:

Bity:

s

znak liczby

$2^n \quad \dots \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$

$b_n \quad \dots \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0$

wartość bezwzględna liczby

Jeżeli na reprezentację liczby stałoprzecinkowej przeznacza się $n+2$ bity (1 bit na znak i $n+1$ bitów na wartość bezwzględną liczby) to struktura ma postać:

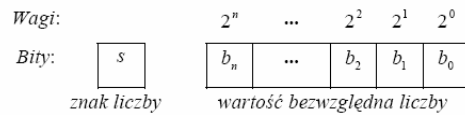
$$liczba = s \cdot \sum_{k=0}^n b_k 2^k$$

gdzie:

$s=1$ lub $s=-1$ (znak liczby)

b_k przyjmuje wartość 0 lub 1 (wartość bezwzględna liczby)

Struktura liczby stałoprzecinkowej



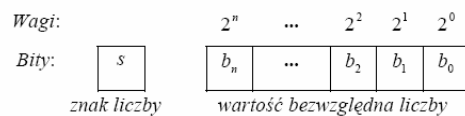
Na $n+2$ bitach można zapisywać liczby całkowite z przedziału:

$$[-2^{n+1}+1; 2^{n+1}-1]$$

Liczby stałoprzecinkowe są podzbiorem liczb całkowitych. Podzbiór ten jest tym większy im większe jest n .

Co to jest nadmiar stałoprzecinkowy?

Struktura liczby stałoprzecinkowej



Języki programowania wysokiego poziomu oferują kilka typów liczb stałoprzecinkowych:

Integer - 16 bitów

LongInt – 32 bity

ShortInt – 8 bitów