Całka potrójna

Obszar normalny Ω (względem OXY) jest dany następująco

$$a \leq x \leq b$$

$$\phi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

$$g(x,y) \leq z \leq h(x,y)$$

gdzie wszystkie funkcje są ciągłe w odpowiednich zakresach.

Zamiana na całkę iterowaną

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz$$

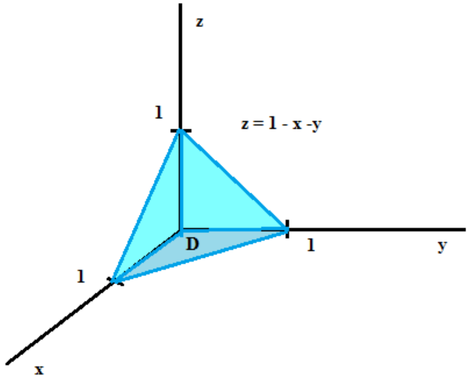
Interpretacja geometryczna

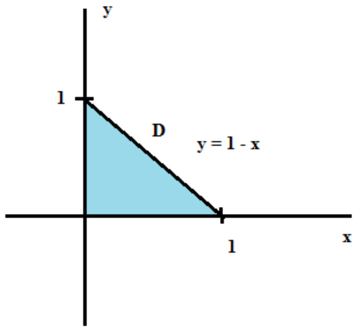
$$\iiint_{\Omega} 1\, dxdydz$$

to objętość Ω

Przykład. Obliczyć $\iiint_\Omega (x+y+z)dxdydz$ jeśli Ω jest bryłą ograniczoną przez płaszczyzny $x=0$, $y=0, z=0,\ x+y+z=1$.

Rozwiązanie. Obszar Ω wygląda następująco (na rys. zaznaczono też D, które jest rzutem Ω na OXY)



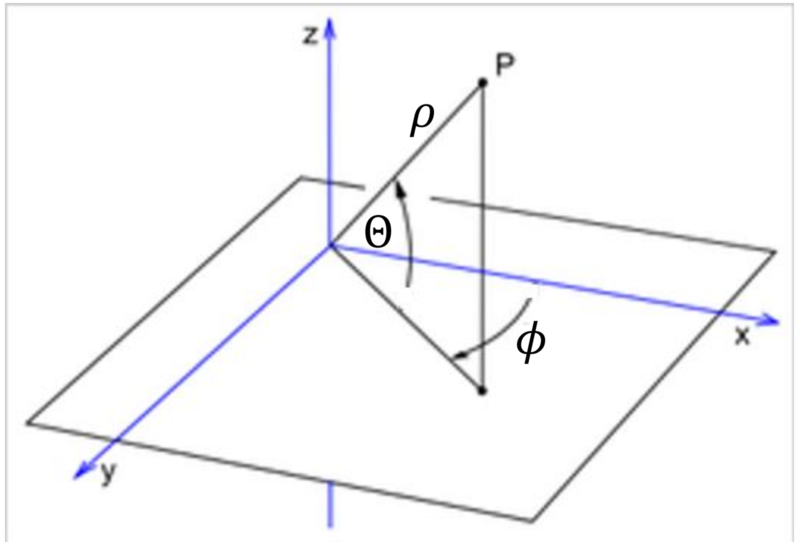


$$\iiint_\Omega (x+y+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} xz + yz + \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} dy =$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y) + y(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} dy = \cdots$$

Współrzędne sferyczne



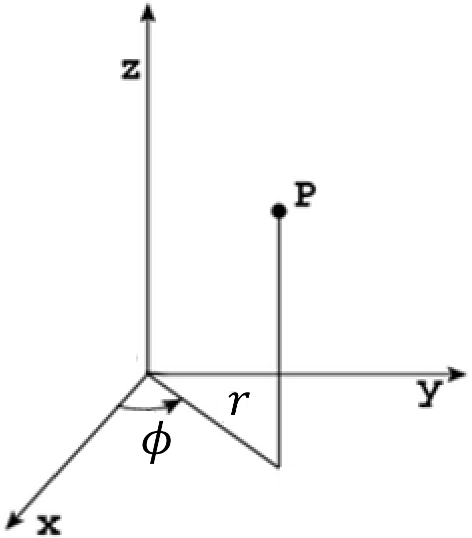
$$x = \rho \cos\theta \cos\phi$$

$$y = \rho \cos\theta \sin\phi$$

$$z = \rho \sin\theta$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \cos\theta$$

Współrzędne walcowe

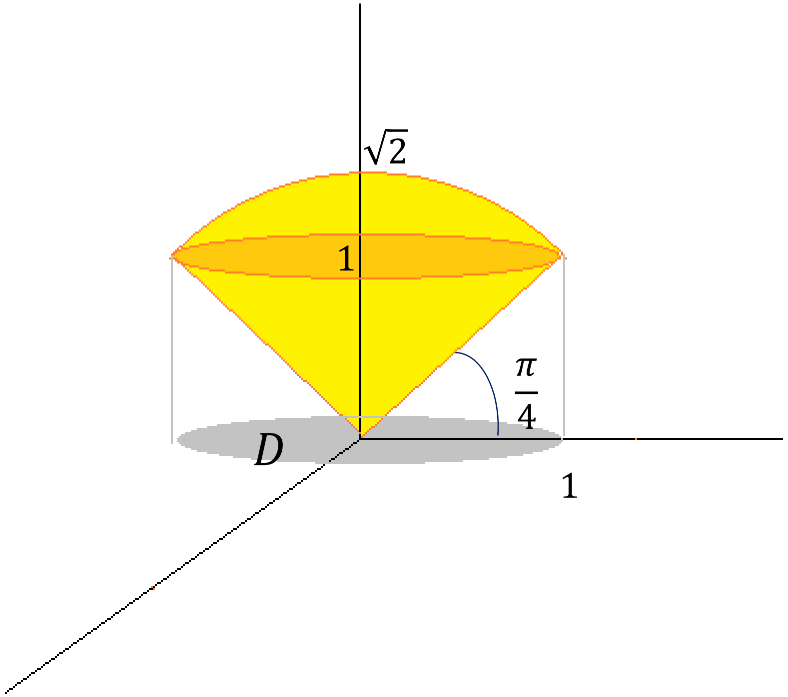


$$x = r \cos\phi$$

$$y = r \sin\phi$$

$$z = z$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\phi,z)} = r$$



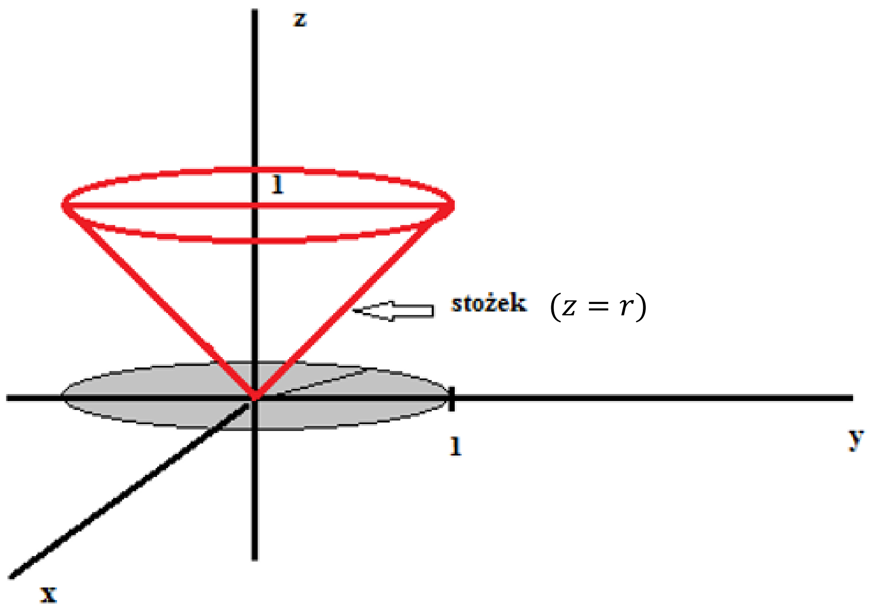
Przykład. Oblicz

$$\iiint_{\Omega} (x+y)\,dxdydz$$

gdzie Ω jest bryłą ograniczoną od spodu przez powierzchnię stożka $z=\sqrt{x^2+y^2}$, a od góry przez sferę $x^2+y^2+z^2=2$.

Rozwiązanie. Ω jest (niepełnym) wycinkiem kuli więc (prawdopodobnie) najlepsze będą współrzędne sferyczne

$$I=\int_0^{\pi/2} d\,\phi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\,\theta \int_0^{1} (r\cos\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi) r^2 \cos\theta\, dr$$
$$=\ldots$$



Przykład. Oblicz

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdydz$$

gdzie Ω jest stożkiem $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$.

Rozwiązanie. Do stożka pasują współrzędne walcowe. Po wstawieniu współrzędnych walcowych stożek ma równanie $z = r$. Czyli ten stożek można opisać następująco (ważne!)

$$0 \leq \phi < 2\pi \qquad \text{(oczywiste)}$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$r \leq z \leq 1 \qquad (od\ spodu\ stożek\ z = r)$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr \int_r^1 r^2 \cdot r\, dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r^3(1-r)dr = 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right).$$

Zadanie 1 . *Obliczyć całki potrójne z danej funkcji f po wskazanym obszarze.*

a) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}, \qquad U : x \leqslant 0, -x \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant -x;$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2, \qquad U : x^2 + y^2 \leqslant 4, 1 - x \leqslant z \leqslant 2 - x;$

Zadanie 2.

a) Obliczyć $\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, dxdydz$, gdzie Ω oznacza obszar ograniczony powierzchniami $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ $(a < b)$, $z = 0$ i $z = c$ $(c > 0)$.

b) Obliczyć $\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, dxdydz$, gdzie Ω jest stożkiem $2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq c$ i $(c > 0)$.

c) Obliczyć $\iiint_\Omega z\, dxdydz$, gdzie Ω jest bryłą ograniczoną z góry przez sferę $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, a od spodu przez stożek $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$, przy czym $x \geq 0, y \leq 0$.

d) (*) Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ oraz płaszczyzną $z = c > 0$. (wskazówka: wypróbuj podstawienie $x = ar\cos\phi$, $y = br\sin\phi$, $z = ct$)