

MODELOWANIE REPREZENTACJI POWIERZCHNI TOPOGRAFICZNEJ Z WYKORZYSTANIEM METODY GEOSTATYSTYCZNEJ**

1 Wprowadzenie

W niniejszym artykule zwrócono uwagę na możliwość wykorzystania metody geostatystycznej w procesie modelowania reprezentacji powierzchni topograficznej (Numeryczny Model Powierzchni Topograficznej – NMPT). W celu oszacowania dokładności NMPT dwa aspekty powinny zostać rozpatrzone: atrybuty danych pomiarowych (dokładność, gęstość, rozmieszczenie) i jakość modelowania powierzchni. Teoria geostatystyczna może znaleźć zastosowanie w przypadku rozwiązywania obydwu zagadnień. Strukturalna analiza geostatystyczna dostarcza interesujących informacji w procesie modelowania powierzchni topograficznej. Określa ona zarówno wielkość obszaru wpływu punktów otaczających na punkt interpolowany (ω – zasięg oddziaływania), jak również umożliwia wykrycie anizotropii czyli zmienności kierunkowej. Rozwiązuje to problem określenia liczby punktów pomiarowych oddziałujących na punkt interpolowany. Informacje te są bardzo użyteczne przy ostatecznym projektowaniu siatki pomiarowej. Kriging czyli interpolacja geostatystyczna jest ponad to jedynym rozwiązaniem interpolacyjnym, które wyznacza błąd interpolacji zwany wariancją krigingu, określający jakość przeprowadzonego modelowania.

W ostatnich latach coraz większe zainteresowanie wzbudza pozyskiwanie NMPT z wykorzystaniem skanera laserowego. Specyficznym problemem tego procesu jest konieczność usuwania ze zbioru punktów pomierzonych wszystkich punktów nie należących do powierzchni topograficznej (zabudowa, roślinność). Z przeprowadzonych badań [1] wynika, że geostatystyka może stanowić pomocne narzędzie w rozwiązywaniu tej kwestii.

Metoda geostatystyczna znajduje także zastosowanie w analizie błędów automatycznej korelacji obrazów [2]. Najważniejszą zaletą tej metody w porównaniu

* Akademia Górniczo – Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska

** Praca wykonana w ramach badań własnych nr 1010150535

z metodami klasycznymi jest wykorzystanie znanych wartości oszacowanych błędów i informacji zawartej w semiwariogramie.

2 Podstawy geostatystyki

Za twórcę geostatystyki uważany jest George Matheron z Centrum Geostatystyki w Fontainebleau (Francja). W latach 1962 – 1963 opublikował on obszerną rozprawę [3] [4], zawierającą teoretyczne podstawy nowej matematycznej metody opisu zmienności – geostatystyki.

W kolejnych dziesięcioleciach nastąpił szybki rozwój zarówno aspektów teoretycznych metody geostatystycznej [5], jak również jej praktycznych zastosowań przede wszystkim w takich dziedzinach nauki jak geologia, hydrologia, meteorologia itp. [6] [7].

Zmienność analizowanego parametru, w tradycyjnym ujęciu, wyrażana jest za pomocą prostych miar statystycznych – wartości średniej, odchylenia standardowego, wariancji lub współczynnika zmienności. Ograniczeniem tych wskaźników jest brak informacji o zlokalizowaniu badanej cechy.

Nowatorstwo geostatystyki polega na potraktowaniu analizowanego parametru, w rozpatrywanych badaniach – współrzędnej wysokościowej, jako tzw. „zmiennej zregionalizowanej”, której wartości są funkcją współrzędnych położenia punktów pomiaru. Strukturę zmienności opisuje w syntetycznej formie tzw. semiwariogram, który określa zależność między średnim zróżnicowaniem wartości wysokości (semiwariancją) i odległością między punktami pomiaru.

Dla dyskretnej i regularnej sieci pomiarów wartości semiwariancji $\gamma(h)$ ustala się ze wzoru:

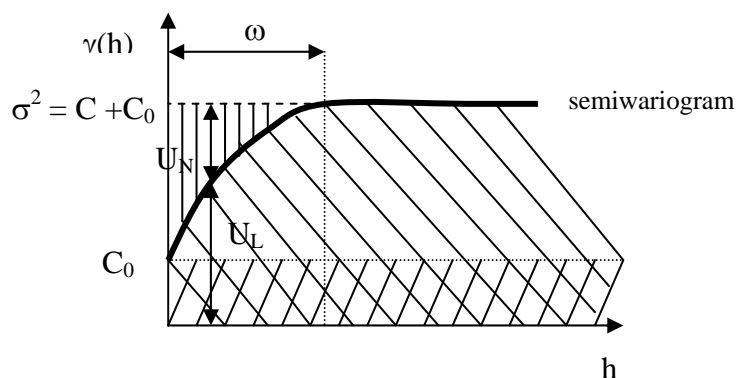
$$\gamma(h) = \frac{\sum_{i=1}^n [z(x) - z(x+h)]^2}{2n} \quad (1.1)$$

gdzie:

$z(x)$, $z(x+h)$ – wartości wysokości w punktach pomiarowych oddalonych o h ,

n – liczba par punktów pomiarowych oddległych o h ,

Przykładowy wykres semiwariogramu przedstawiono na rysunku 1.



Rysunek 1 Przykładowy wykres semiwariogramu

C_0 – podstawa wywołana składową losową, lokalne zróżnicowanie w skali pojedynczej próbki, „efekt samorodków” (ang. *nugget effect*),

C – wartość progowa (ang. *sill*),

ω – zasięg oddziaływania,

h – odległość,

$\gamma(h)$ – semiwariancja,

U_L – udział składnika losowego

U_N – udział składnika nielosowego

▤▤▤▤ pole zmienności nielosowej,

▧▧▧▧ pole zmienności losowej wywołanej niejednorodnością niższego rzędu, uzależnioną od odstępów między punktami pomiarowymi,

▩▩▩▩ pole zmienności losowej wywołanej niejednorodnością efektywną, przejawiającą się w skali pojedynczej próbki.

Analiza postaci semiwariogramów empirycznych pozwala na przeprowadzenie opisu jakościowego prawidłowości występujących w zróżnicowaniu wartości analizowanego parametru.

Aby możliwe było przeprowadzenie opisu ilościowego konieczne jest przybliżenie semiwariogramów empirycznych prostymi funkcjami matematycznymi.

Analiza semiwariogramów teoretycznych pozwala na określenie zasięgu oddziaływania ω i udziału składnika losowego (U_L) i nielosowego (U_N) dla dowolnej odległości h między punktami pomiarów.

Z definicji semiwariogramu wynika, że dla $h = 0$, wartość semiwariancji powinna wynosić zero. W praktyce zdecydowana większość semiwariogramów przy $h \rightarrow 0$, osiąga pewną wartość C_0 , która charakteryzuje zmienność lokalną parametru. Na wielkość tej zmiennej wpływają dwa czynniki: losowe wahania parametru w skali mniejszej od odstępów między punktami pomiarowymi i błędy losowe popełnione w trakcie pomiaru.

Znajomość geostatystycznego modelu zmienności umożliwia zastosowanie interpolacji zwanej krigingiem (twórca D. Krige). W zależności od charakterystyki zmiennej zregionalizowanej istnieje możliwość wyboru różnych wariantów krigingu.

Zmienna zregionalizowana jest określana jako suma trzech czynników [8]:

$$Z(x) = m(x) + \varepsilon'(x) + \varepsilon'' \quad (1.2)$$

gdzie:

$m(x)$ – funkcja zdeterminowana,

$\varepsilon'(x)$ – czynnik losowy, przestrzennie skorelowane odchyłki od $m(x)$,

ε'' – błędy szcztatkowe,

Pierwszym krokiem jest wyznaczenie właściwej funkcji $m(x)$, od niej bowiem zależec będzie wybór odpowiedniego wariantu krigingu.

W najprostszym przykładzie, gdy spełnione są warunki stacjonarności, $m(x)$ równa się wartości średniej wysokości na badanej powierzchni. Wartość w punkcie interpolacji jest liczona jako średnia ważona z grupy punktów sąsiadujących:

$$Z(x_0)^* = \sum_{i=1}^n a_i \cdot Z(x_i) \quad (1.3)$$

a_i – współczynniki wagowe,

$Z(x_0)^*$ - wartość wysokości w punkcie interpolowanym,

$Z(x_i)$ – wartość wysokości w punkcie pomiarowym.

Istota krigingu zawiera się w sposobie określenia współczynników wagowych. Są one ustalane w oparciu o dwa postulaty:

1. Postulat nieobciążalności estymatora $Z(x_0)^*$

$$E[Z(x_0) - Z(x_0)^*] = 0$$

2. Postulat optymalności – minimalizacji wariancji wyrażenia $(Z(x_0) - Z(x_0)^*)$

$$\text{Var}(Z(x_0) - Z(x_0)^*) = \min$$

Spełnienie obu postulatów prowadzi do określenia wielkości współczynników wagowych metodą Lagrange'a z układu równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_j \cdot \gamma(x_i, x_j) = \gamma(x_0, x_i) + \lambda \\ \sum_{j=1}^n a_j = 1 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

$\gamma(x_i, x_j)$ – wartość semiwariogramu dla odległości między punktami pomiarowymi x_i , x_j ,

$\gamma(x_0, x_i)$ – wartość semiwariogramu dla odległości między punktem interpolowanym x_0 i punktem pomiarowym x_i ,

λ - mnożnik Lagrange'a,

a_j – współczynniki wagowe.

W rzeczywistości jednak warunek stacjonarności nie zawsze jest możliwy do spełnienia ze względu na występujące tendencje w zmienności badanego parametru. W przypadku wyraźnie zaznaczającego się trendu możliwe są dwa sposoby postępowania. Gdy występuje globalny trend powierzchniowy, oryginalne wartości wysokości są redukowane o wartość trendu. Analiza semiwariogramów i interpolacja są wówczas przeprowadzane na danych pozbawionych trendu. Jeżeli dane zawierają trendy lokalne, które nie są stałe na całej badanej powierzchni, wówczas zalecane jest stosowanie krigingu uniwersalnego. W metodzie tej wartości współczynników wagowych są uzależnione od formy równania trendu, nie zależą jednak od wielkości współczynników wielomianu opisującego zmienność badanego parametru [8].

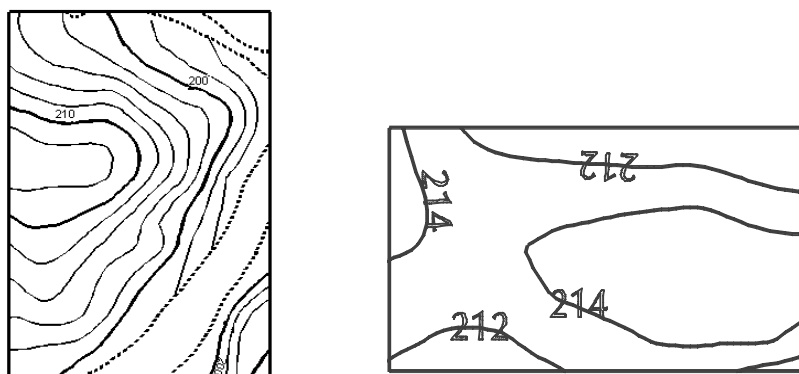
3 Dokładność geostatystycznej metody interpolacji w przypadku różnych form ukształtowania powierzchni topograficznej

Na dokładność modelowania NMPT ma wpływ również charakterystyka badanej powierzchni. W niniejszym rozdziale zawarta jest analiza, dająca odpowiedź na pytanie jak interpolacja geostatystyczna przebiega w przypadku różnych form ukształtowania terenu. Rozpatrywano stok o stałym nachyleniu (teren 1), oraz teren równinny o niewielkich deniwelacjach (teren 2). Procedura badawcza może zostać podzielona na pięć etapów:

- przeprowadzenie analizy trendu,
- wyznaczeniu semiwariogramów empirycznych dla badanych powierzchni,
- dobór semiwariogramów teoretycznych,
- przeprowadzenie interpolacji metodą geostatystyczną,
- analiza dokładności interpolacji geostatystycznej.

3.1. Charakterystyka badanych powierzchni topograficznych

Teren 1 – obszar 302×387 m, obejmujący stok o jednostajnym nachyleniu i maksymalnej deniwelacji ok. 15m. Teren 2 – obszar o wymiarach 130×240 m, względnie płaski, o maksymalnym nachyleniu 1.5° . Warstwicowe przedstawienie obydwu powierzchni nakreślone jest na Rysunku 2.



Rysunek 2 Rysunek warstwicowy terenu 1 i 2

Badane obszary zostały przedstawione za pomocą punktów pomiarowych zarejestrowanych przy wykorzystaniu metody stereoskopowej w siatce regularnej o odstępnie 24 m [9]. Punkty te posłużyły do wygenerowania nowej dziesięciometrowej siatki regularnej wykorzystując interpolację geostatystyczną.

3.2. Analiza trendu

Pierwszy etap badań miał na celu wyznaczenie trendu występującego w analizowanych powierzchniach. Postać trendu warunkuje bowiem wybór odpowiedniego wariantu krigingu. Analiza trendu polegała na aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów zbioru punktów pomiarowych funkcją wielomianową.

Jako miarę stopnia dopasowania trendu użyto współczynnik determinacji, określający udział zmienności wyjaśnionej przez trend w globalnej zmienności danych wejściowych [10] [11]:

$$r^2 = 1 - \frac{S_p^2}{S^2} \quad (3.1)$$

S_p^2 – suma kwadratów odchyłeń obserwowanych wartości parametru od wartości wskazanych przez trend,

S^2 - suma kwadratów odchyłeń obserwowanych wartości parametru od wartości średniej,

Istotność aproksymacji danych empirycznych zweryfikowano za pomocą testu F – Snedecora na poziomie istotności $\alpha = 0.01$. Sprawdzian ten ma postać:

$$F = \frac{S^2 - S_p^2}{m} \div \frac{S_p^2}{n-m-1} \quad (3.2)$$

m – liczba wyrazów wielomianu stopnia p bez wyrazu wolnego,

n – liczba danych w oparciu o które ustalono postać wielomianu.

Przebadano także istotność podwyższenia stopnia wielomianu na dopasowanie trendu do danych empirycznych:

$$F_{\Delta} = \frac{S_p^2 - S_{p+1}^2}{m-k} \div \frac{S_{p+1}^2}{n-m-1} \quad (3.3)$$

m, k – liczba wyrazów wielomianu odpowiednio stopnia $p+1$, p

Uzyskane wyniki zawarte są w Tabeli 1.

Tabela 1: Analiza trendu przeprowadzona dla terenu 1 i 2 (znak + oznacza brak podstaw do odrzucenia hipotezy o istotności trendu)

Badany teren	Kryteria istotności	Wartości testu dla wielomianu stopnia	
		2	3
TEREN 1	r^2	0.689	0.773
	F	87.3 +	69.1 +
	F_{Δ}	11.4 +	0.32 -

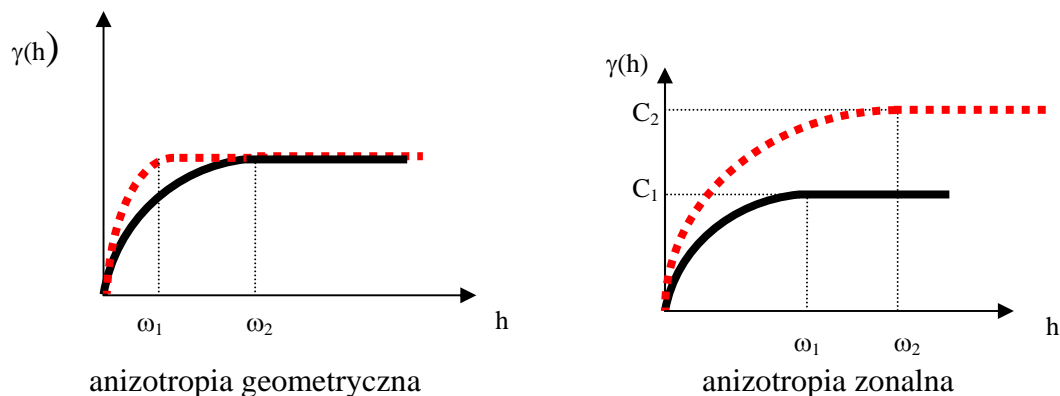
TEREN 2	-	-	-
----------------	---	---	---

Dla terenu 1 analiza wyników testów wskazuje, że przybliżenie danych empirycznych modelem teoretycznym jest statystycznie istotne począwszy od wielomianu drugiego stopnia. Jednakże jak pokazują wyniki testu F_{Δ} podwyższenie stopnia wielomianu wpłynęło znacząco na poprawę dokładności aproksymacji. Ostatecznie więc przyjęto wielomian sześcienny jako funkcję trendu. W przypadku terenu 2 nie wykryto znaczących tendencji w badanej powierzchni topograficznej. Zgodnie z teorią przyjęto więc jako funkcję $m(x)$ wartość średnią wysokości punktów pomiarowych na badanej powierzchni.

Ze względu na fakt, że funkcje $m(x)$ są stałe na całości badanych powierzchni, dane wejściowe zostały zredukowane o wartość trendu. Dalsza analiza semiwariogramów i interpolacja była przeprowadzona na danych pozbawionych trendu.

3.3. Wyznaczenie semiwariogramów empirycznych

Na podstawie obserwowanych wartości wysokości wyznaczono semiwariogramy empiryczne w czterech kierunkach: 0° , 45° , 90° , 135° (tolerancja $\pm 10^{\circ}$). Analiza postaci semiwariogramów empirycznych pozwoliła na wykrycie i charakterystykę prawidłowości występujących w zróżnicowaniu wartości wysokości terenu. Głównym zadaniem było wyznaczenie anizotropii czyli zmienności kierunkowej [12]. W teorii geostatystycznej wyróżnia się dwa rodzaje anizotropii: geometryczną i zonalną [13]. W przypadku anizotropii geometrycznej wykresy semiwariancji dla poszczególnych kierunków różnią się tylko zasięgiem oddziaływania ω , gdy występuje anizotropia zonalna wraz ze zmianą kierunku zmienia się zasięg oddziaływania ω , jak również wartość progowa C . Na Rysunku 3 przykłady wspomnianych typów anizotropii zilustrowano za pomocą semiwariogramów wyznaczonych dla kierunku minimalnej i maksymalnej zmienności.



Rysunek 3 Semiwariogramy dla kierunku minimalnej i maksymalnej zmienności w warunkach anizotropii geometrycznej i zonalnej

Po wstępnej analizie semiwariogramów empirycznych stwierdzono, że w terenie 1 występuje anizotropia, a kąt minimalnej zmienności wynosi $\varphi = 90^\circ \pm 10^\circ$.

W terenie 2 zmienności kierunkowej nie zaobserwowano.

3.4. Dobór semiwariogramów teoretycznych

Aby możliwe było przeprowadzenie ilościowej oceny zmienności wysokości na badanych powierzchniach, konieczne jest przybliżenie semiwariogramów empirycznych prostymi funkcjami analitycznymi, które traktuje się jako geostatystyczne modele zmienności. W geostatystyce występuje szereg modeli semiwariogramów między innymi : liniowy, sferyczny, logarytmiczny, Gaussa, potęgowy itp. [14]. Aproksymację semiwariogramu empirycznego modelem teoretycznym przeprowadzono z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów. Dla terenu 1 najwłaściwszy okazał się semiwariogram Rational Quadratic [15] o następującej charakterystyce:

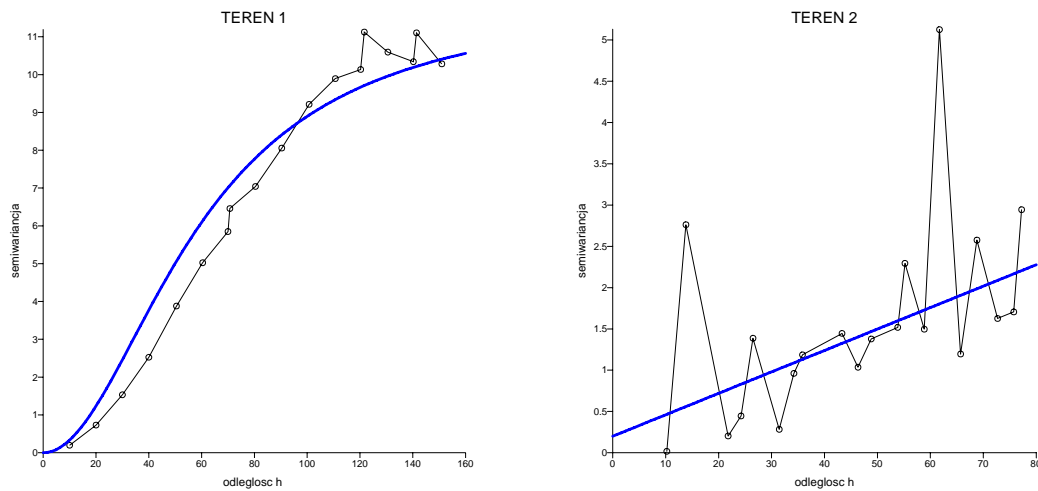
wartość progowa $C = 12$ m

zasięg oddziaływania $\omega = 110$ m

współczynnik anizotropii $a = 2$

kąt minimalnej zmienności $\varphi = 90^\circ \pm 10^\circ$.

Semiwariogram empiryczny dla terenu 2 został przybliżony funkcją liniową o kącie nachylenia 0.025. Wykresy semiwariogramów empirycznych i aproksymujących je modeli teoretycznych przedstawiono na rysunku 4.



Rysunek 4 Wykresy semiwariogramów teoretycznych aproksymujących dane empiryczne odpowiednio dla terenu 1 i 2

3.5. Przeprowadzenie interpolacji metodą geostatystyczną

Po wyznaczeniu modeli teoretycznych opisujących zmienność wysokości badanych powierzchni można było przeprowadzić interpolację geostatystyczną metodą kriginu. Bazując na punktach pomiarowych wyinterpolowano siatkę regularną o odstępnie 10 m. Dla każdego terenu wyznaczono niezależną metodą fotogrametryczną zbiór punktów kontrolnych o liczebności 150 punktów. Poprzez porównanie punktów w wyinterpolowanej siatce regularnej z punktami kontrolnymi określono zbiór odchylek szczttkowych dla każdego fragmentu powierzchni topograficznej. Na ich podstawie przeprowadzono ocenę dokładności wyznaczając: średni bład kwadratowy (RMSE), świadczący o dokładności odwziedlenia powierzchni topograficznej i wartość średnią błędów szczttkowych (\bar{x}) [9].

Uzyskane wyniki porównano z dokładnościami otrzymanymi dla terenu 1 i 2 przy zastosowaniu interpolacji biliniowej [9]. Końcowe rezultaty zostały zawarte w Tabeli 2.

Tabela 2 Porównanie dokładności interpolacji biliniowej i kriginu

	Bład średni kwadratowy (RMSE) [m]		Wartość średnia błędów szczttkowych (\bar{x}) [m]	
	biliniowa	kriging	biliniowa	kriging
TEREN 1	± 0.294	± 0.213	0.118	0.047
TEREN 2	± 0.164	± 0.158	0.016	0.014

Podsumowując uzyskane wyniki można stwierdzić, że kriging jest efektywną metodą interpolacji dla terenów, w których występuje nielosowy charakter zmienności. W przypadku terenu 1 uzyskano zdecydowanie lepsze rezultaty, wykorzystując metodę krigingu niż przy zastosowaniu interpolacji biliniowej. Dla terenu 2, będącego obszarem prawie płaskim, otrzymano porównywalne wyniki niezależnie od wyboru metody interpolacyjnej.

3.6. Wyznaczenie błędu interpolacji

Kriging jest jedyną metodą interpolacyjną, w której możliwe jest przeprowadzenie oceny dokładności interpolacji. Wariancja oceny parametru - σ_k^2 zwana wariancją krigingu jest określona przez zależność[16]:

$$\sigma_k^2 = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \gamma(x_j, x_0) + \lambda \quad (3.5)$$

Oznaczenia identyczne jak w równaniu (1.4).

Wariancja krigingu została wyznaczona dla terenu 1 dla wszystkich punktów wyinterpolowanych. Błędy krigingu - σ_k obejmowały zakres [0.00 - 0.64 m], wzrastając wraz z odległością punktu interpolowanego od punktów pomiarowych. Maksymalne wartości błędów pojawiły się w obszarach gdzie z powodu utrudnionego pomiaru stereoskopowego brakowało punktu pomiarowego w węźle siatki wejściowej. Średni błąd krigingu dla całego terenu 1 wyniósł 0.1m. Można więc powiedzieć z prawdopodobieństwem 95 %, że średnie błędy interpolacji nie przekroczą wartości $2 \cdot \sigma_k$ czyli 0.2 m. Dokładność ta znajduje odzwierciedlenie w rezultatach uzyskanych poprzez porównanie wartości wysokości punktów wyinterpolowanych z punktami kontrolnymi (podrozdział 3.5).

4 Projektowanie siatki pomiarowej

Jednym z interesujących wkładów metody geostatystycznej do generowania modelu jest optymalizacja siatki pomiarowej. Oparta jest ona na analizie oszacowanych błędów σ_k^2 .

Wykorzystano zależność określającą ilość punktów pomiarowych na badanej powierzchni:

$$n = \frac{F}{h^2} \quad (4.1)$$

gdzie:

F – powierzchnia rozpatrywanego obszaru,

h – odstęp między punktami pomiarowymi,

A także, wzór określający liczebność próby w metodzie geostatystycznej [17]:

$$n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2(h)}{S^2} \quad (4.2)$$

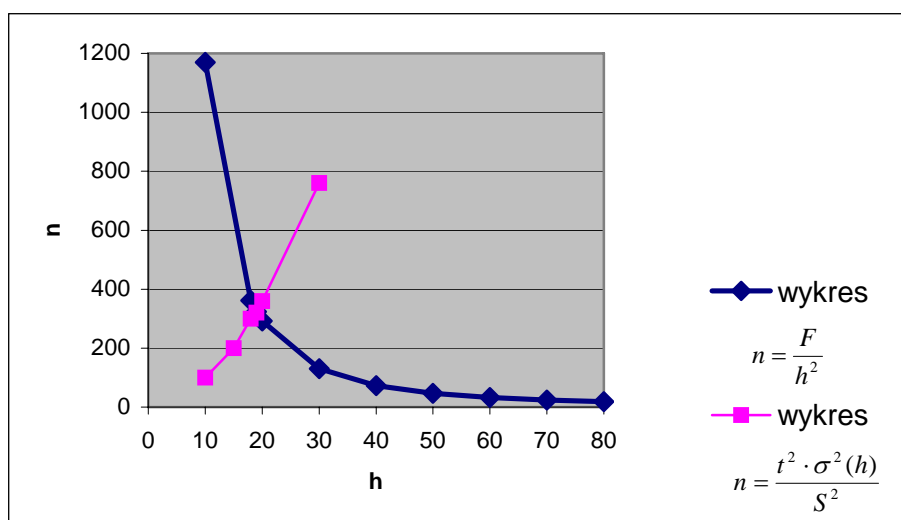
gdzie:

t – parametr prawdopodobieństwa, z jakim dokonano oceny dokładności (zwykle przyjmuje się dla prawdopodobieństwa 95%, $t = 2$),

S – zadany stopień dokładności,

$\sigma^2(h)$ – wariancja krigingu oszacowana dla całej powierzchni, jako funkcja odstępu między punktem pomiarowym i punktem wyinterpolowanym.

Bazując na przedstawionych wzorach (4.1) i (4.2) określono optymalną gęstość siatki pomiarowej dla terenu 1. Przyjmując stopień dokładności $S = 0.1$ m uzyskano odstęp pomiędzy punktami pomiarowymi równy 19 m. W sposób przejrzysty można zależność tą przedstawić graficznie (Rys.5).



Rysunek 5 Graficzny sposób wyznaczenia gęstości siatki pomiarowej

5 Wnioski

Kriging jest zaawansowaną metodą interpolacji, której wiarygodność w dużej mierze uwarunkowana jest formą semiwariogramu. Nie zawsze jest oczywiste czy dane przybliżenie semiwariogramu jest faktycznie prawdziwym estymatorem zmienności przestrzennej. Obecność obserwacji odstających w danych pomiarowych może zostać niezauważona we wstępnej analizie i wprowadzać duże zakłócenia w procesie określania semiwariancji.

Niewątpliwą zaletą krigingu jest możliwość optymalnego oszacowania wag interpolacji, jak również określenia we wstępnej analizie semiwariogramów wielkości, kształtu i orientacji obszaru zależności przestrzennych (wyznaczenie zasięgu oddziaływania - ω oraz kąta i współczynnika anizotropii).

Dodatkową korzyścią jest fakt, że metoda pozwala na oszacowanie błędów, co nie jest możliwe w innych rozwiązaniach interpolacyjnych.

Podsumowując badania można stwierdzić, że tak zaawansowana technika jak kriging wymaga szczegółowej analizy danych wejściowych. Brak kontroli nad poszczególnymi etapami analizy geostatystycznej może doprowadzić do uzyskania fikcyjnych wyników. Metoda ta jest efektywna w przypadku obszarów o wysokim stopniu skorelowania wartości wysokości (teren1). W przypadku terenów o dużej losowości zależności przestrzennych uzyskane wyniki są zbliżone do wyników otrzymanych innymi metodami interpolacyjnymi.

6 Literatura

- [1] Lochmann P., Approaches to the filtering of laser scanner data. XIX th Congress of the ISPRS, Amsterdam 2000.
- [2] Delgado J. , On the use of the geostatistical estimation techniques to the generation, debugging and analysis of digital surface models. XIX th Congress of the ISPRS, Amsterdam 2000.
- [3] Matheron G., *Traité de géostatistique appliquée*, Memoires du Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Paryż 1962, 1963(a).
- [4] Matheron G., *Principles of geostatistics*, Lancaster 1963(b).
- [5] Isaaks E., Srivastava M., *An Introduction to Applied Geostatistics*. Oxford University Press, New York 1989.

- [6] David M., Geostatistical ore reserve estimation. Elsevier scientific publishing company, Amsterdam – Oxford – New York 1977.
- [7] Journel A. G., Huijbregts C. J., Mining Geostatistics. Academic Press., London 1978.
- [8] Burrough P.A., Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment Monographs on soil and resources survey, Oxford 1994.
- [9] Babiarz U., Analiza dokładności numerycznego modelu powierzchni topograficznej tworzonego z wykorzystaniem fotogrametrycznych stacji cyfrowych. Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja, z.1, 2001.
- [10] Kokesz Z. Geostatystyczna charakterystyka złóż siarki na potrzeby rozpoznawania i szacowania zasobów. Praca doktorska. Kraków 1984.
- [11] Mucha J., Geostatystyczny model zmienności złoża cynku i ołowiu Kopalni Trzebieńka. Praca doktorska. Kraków 1980.
- [12] Kokesz Z., Mucha J., Anizotropia parametrów złożowych – cele i metody badania. Technika Poszukiwań Geologicznych, z.2, Warszawa 1984.
- [13] Wackernagel H., Multivariate Geostatistics. Springer, 1995.
- [14] David M., Handbook of applied advanced geostatistical ore reserve estimation, Elsevier scientific publishing company. Amsterdam – Oxford – New York – Tokyo 1988.
- [15] Cressie N., Statistics for Spatial Data. John Wiley and Sons, New York 1991.
- [16] Mucha J., Możliwość zastosowania krigingu w warunkach śląsko – krakowskich złóż cynkowo – ołowiowych. Przegląd Geologiczny, nr 12, 1979.
- [17] Kokesz Z., Nieć M., Metody geostatystyczne w rozpoznawaniu i dokumentowaniu złóż oraz w ochronie środowiska. Wydawnictwo CPPGSMiE PAN, Kraków 1992.